UNICAMP

ANDREA DE PAULA MACHADO MOREIRA

APLICAÇÕES DA TEORIA DA DECISÃO E PROBABILIDADE SUBJETIVA EM SALA DE AULA DO ENSINO MÉDIO

CAMPINAS
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Andrea de Paula Machado Moreira

APLICAÇÕES DA TEORIA DA DECISÃO E PROBABILIDADE SUBJETIVA EM SALA DE AULA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientadora: Profa. Dra. Laura Leticia Ramos Rifo

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA ANDREA DE PAULA MACHADO MOREIRA E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. LAURA LETICIA RAMOS RIFO.

Assinatura da Orientadora

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica

Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Moreira, Andrea de Paula Machado, 1976-
M813a Aplicações da teoria da decisão e probabilidade subjetiva em sala de aula do ensino médio / Andrea de Paula Machado Moreira. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Laura Leticia Ramos Rifo.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Probabilidades. 2. Probabilidades - Estudo e ensino (Ensino médio). 3. Probabilidade subjetiva. 4. Decisão estatística. I. Rifo, Laura Leticia Ramos,1970-. II.Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital
Título em outro idioma: Applications of decision theory and subjective probability in high school classroom
Palavras-chave em inglês:
Probabilities
Probabilities - Study and teaching (High school)
Subjective probability
Statistical decision
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Laura Leticia Ramos Rifo [Orientador]
Teresa Cristina Martins Dias
Samuel Rocha de Oliveira
Data de defesa: 29-06-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 29 de junho de 2015 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LAURA LETICIA RAMOS RIFO

Prof(a). Dr(a). TERESA CRISTINA MARTINS DIAS

Prof(a). Dr(a). SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA

ABSTRACT

This study consists in exploring probability with its different approaches, introducing in the high schools the concept of subjective probability, a main topic in several areas, such as medicine, engineering, management among others. The textbooks and handouts, mostly of the times, show only the classical probability. The subjective approach of probability and theory of decision is made through practical, activities, leading the students to reflexion and new questions. They deal also with interdisciplinarity with other areas of knowledge. It is an innovative and challenging work, since subjective probability and theory of decision are not subjects of the mathematics curriculum in high school. It is expected that this material can be helpful for supporting teachers who believe they must go beyond the contents proposed by the usual curriculum and consider the integral formation of their students.

Keywords: Decision Tree**,** Probability, Subjective Probability, Theory of Decision, Theory of Utility.

RESUMO

Este estudo consiste em explorar probabilidade com suas diferentes abordagens e introduzir, no ensino médio, conceitos de probabilidade subjetiva e teoria da decisão. Tem por objetivo salientar a importância do ensino de probabilidade, tópico utilizado em diversas áreas, como medicina, engenharia, administração entre outras. Sabe-se que este tema, infelizmente, é pouco visto no ensino fundamental e médio. Os livros didáticos e apostilas, na maioria das vezes, apresentam somente probabilidade clássica. A abordagem da probabilidade subjetiva e da teoria da decisão é feita através de atividades práticas, levando os alunos à reflexão e novos questionamentos. Propõe-se também interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento. É um trabalho inovador e desafiador, já que probabilidade subjetiva e teoria da decisão não são assuntos do currículo de Matemática para o ensino médio. Espera-se que este material sirva de apoio para professores que acreditam que devem ir além dos conteúdos propostos pelo currículo comum e valorizam a formação integral de seus alunos.

Palavras – chave: Árvore da Decisão**,** Probabilidade, Probabilidade Subjetiva, Teoria da Decisão, Teoria da Utilidade.

SUMÁRIO

“Que tamanho tem o seu universo?

O universo tem o tamanho do seu mundo.

Que tamanho tem o seu mundo?

Tem o tamanho dos seus sonhos.”

Augusto Cury

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de toda vida, pela oportunidade de realizar um sonho ao concluir este mestrado.

Aos meus pais e irmãs, por acreditarem sempre no meu potencial. Em especial ao meu pai Vitor Machado, por me ensinar a somar, subtrair e multiplicar enquanto eu ainda nem sabia ler. Daí surgiu minha aptidão pela matemática.

Ao meu marido Fabiano Almeida, pelo apoio e incentivo. Por ter cuidado dos nossos filhos, enquanto eu precisava dedicar horas dos meus finais de semana aos estudos. Pelo companheirismo e confiança, minha eterna gratidão.

Aos meus amados filhos, Vinícius e Júlia, ainda pequenos, mas já apaixonados pela matemática.

Aos mestres que foram essenciais para a minha formação intelectual e acadêmica. A todos que contribuíram para o meu crescimento profissional. Aos professores deste curso, doutores da Unicamp, por me mostraram que além de dominar o conteúdo a ser ensinado é necessário ter paixão pelo que se faz.

À minha orientadora Laura Letícia Ramos Rifo, sempre disposta a me ajudar com ideias, opiniões e correções. Sua alegria e ânimo são contagiantes.

Aos diretores e professores, colegas de trabalho, pelas palavras de coragem que me impulsionavam quando estava cansada diante das dificuldades.

Aos meus colegas da turma Profmat de 2013, pelos exercícios compartilhados, momentos de estudos e discussões. Aprendi muito com cada um de vocês.

Ao colega André da Silva Coura, aluno da turma do Profmat de 2012, por solucionar minhas dúvidas no projeto enviado ao CEP.

Ao colega de turma Clóvis Vilas Boas, companheiro de viagem, pela paciência e pelo tempo de aprendizagem que vivenciamos juntos.

À Capes por ter dado apoio financeiro, essencial para manter minhas viagens e estadias.

Muito obrigada.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

CAPÍTULO 1

PREFÁCIO

Este trabalho tem por objetivo apresentar probabilidade e suas diferentes interpretações, bem como inserir no currículo do Ensino Médio a teoria da decisão.

O estudo de probabilidade, até então, tradicionalmente trabalhado no Ensino Médio, foi aos poucos introduzido nos currículos do Ensino Fundamental, no bloco Tratamento da Informação, devido à sua grande importância no contexto atual. O cálculo de probabilidade se destaca cada vez mais em nosso cotidiano e os princípios probabilísticos tem se tornado instrumento de trabalho para muitas áreas do conhecimento, já que diversos fenômenos são tratados como experimentos aleatórios.

O currículo comum do ensino médio desenvolvido atualmente nas escolas brasileiras, em especial nas escolas públicas, apresenta somente a concepção laplaciana de probabilidade, limitando-se o estudo aos casos nos quais se supõe a equiprobabilidade.

A finalidade desta dissertação do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é oferecer ao professor um material que apresente as diferentes abordagens de probabilidade, considerando em alguns momentos os contextos históricos, dando espaço ao lúdico e às atividades diversificadas. Inserimos também a concepção subjetivista de probabilidade, a teoria da decisão e a relação com a Estatística. Queremos proporcionar ao aluno um modo diferente de aprendizagem, baseado não apenas no tradicionalismo em que o aluno é o receptor das ideias e conceitos passados pelo professor. Percebemos no mundo atual a necessidade de um ensino mais eficaz, atrativo, chamativo para o aluno. Sem deixar de lado os conceitos e formalismos necessários para a aprendizagem do conteúdo, porém inserindo atividades lúdicas e questionadoras, no qual há espaço para discussão e entretenimento. Estabelecemos também a relação entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, favorecendo uma formação interdisciplinar.

No Capítulo 2, percorremos a história apresentando um resumo de todo o desenvolvimento do cálculo de probabilidade, dos jogos de azar à probabilidade moderna. A História da Matemática propicia a relação da matemática à vida cotidiana, revelando ao aluno outra forma de poder ver e entender essa disciplina. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes. Ao aliar história e matemática verificamos que a matemática é uma construção humana que foi desenvolvida ao longo do tempo.

No Capítulo 3, apresentamos os conceitos básicos para o estudo de probabilidade, como espaço amostral, eventos e experimento aleatório. Abordamos aqui as diferentes concepções de probabilidade. Apresentamos a probabilidade clássica ou laplaciana que define probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam igualmente prováveis; a probabilidade clássica é a apresentada nos livros didáticos para o Ensino Médio. A abordagem axiomática ou formal construída por Kolmogorov é por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos deles. Mostramos a concepção frequentista, na qual, a probabilidade emerge de uma experimentação em que os experimentos são realizados repetidas vezes. A probabilidade geométrica é apresentada entre grandezas de mesma natureza, por meio de comprimentos, área ou volumes. Por fim, a interpretação de probabilidade subjetiva, onde a probabilidade expressa o grau de infomação pessoal. Descrevemos cada uma das interpretações de modo a oferecer ao professor uma ampla concepção e compreensão da linguagem do cálculo de probabilidades. Deve ficar claro que, apesar de cada interpretação apresentar a probabilidade do seu modo, não há um conceito mais correto do que o outro, pois todas elas satisfazem as mesmas regras básicas. Para cada experimento verificamos que uma ou outra abordagem pode ser a mais adequada para o entendimento do problema. Alguns experimentos probabilísticos podem ser modelados convenientemente por um espaço de probabilidade uniforme, enquanto que outros por um espaço de probabilidade frequentista. Há problemas em que podemos casar frequências experimentais e a teoria clássica. Há outros nos quais o conflito entre as tendências subjetivista e clássica pode ser resolvido por meio de um conceito frequentista através de uma simulação. O modelo de probabilidade a ser empregado em determinada situação particular deve ser tarefa que os próprios alunos poderão investigar juntamente com o professor. Aí está a oportunidade de oferecer aos alunos a possibilidade de experimentar, explorar, discutir e trocar ideias.

O conceito de probabilidade condicional merece destaque e por esse motivo foi desenvolvido com mais detalhe no Capítulo 4. Fazemos uma ligação da probabilidade condicional com outras áreas do conhecimento, em especial com testes de diagnóstico clínico. Chamamos a atenção do leitor para o possível uso da probabilidade condicional em situações do cotidiano, onde várias vezes o teorema de Bayes pode ser usado para atualizar nossa informação sobre certo fenômeno. O teorema de Bayes é aplicado em duas situações como exemplo que podem ajudar o professor a um melhor entendimento do conceito teórico.

No Capítulo 5 introduzimos teoria da decisão. Propomos um desafio ao professor do Ensino Médio, já que esse assunto não faz parte do currículo básico comum. A relação da teoria da decisão com a probabilidade subjetiva pode ajudar o aluno a desenvolver uma melhor compreensão do tópico probabilidade. Num mundo globalizado, onde as mudanças ocorrem a todo o momento e, as decisões, muitas vezes, devem ser pensadas tão rapidamente quanto as informações que chegam até nós, faz-se necessário o entendimento da teoria da decisão. Os conceitos relacionados à teoria da decisão ajudam-nos a fazer escolhas coerentemente. Neste capítulo trazemos o problema dos cupcakes. Elaboramos esse problema tendo como base situações comuns em sala de aula de ensino médio, principalmente quando os alunos se unem para arrecadar certa quantia em dinheiro na busca de uma almejada viagem de formatura. Desse modo, chamamos a atenção dos alunos para um assunto que é de interesse. A resolução desse problema é apresentada de forma detalhada e de fácil entendimento, possibilitando a compreensão e a assimilação de todos os critérios envolvidos numa escolha. Nesse problema tratamos das ações possíveis a serem tomadas no processo de decisão, a incerteza, a matriz de decisão, os critérios adotados, a teoria da utilidade esperada, o equivalente certo, a informação perfeita e a árvore de decisão.

No Capítulo 6 desenvolvemos as atividades lúdicas e interdisciplinares relacionadas ao assunto probabilidade e teoria da decisão. Observando a necessidade de adequação aos alunos com diferentes motivações, interesses e capacidade, os jogos são uma oportunidade para se ensinar Matemática de forma mais criativa e dinâmica. As atividades foram elaboradas cuidadosamente, aplicadas em turmas de ensino médio e coletadas as informações obtidas com cada uma delas. Salientamos os pontos positivos e consideramos os pontos falhos, para que o professor ao aplicá-las possa considerá-los.

A atividade 6.1 “Role os Dados” propõe o entendimento de probabilidade clássica e frequentista, trabalhando com o espaço amostral para o lançamento de dois dados comuns e não balanceados. Nesse jogo o aluno é o principal decisor e deverá concluir por si mesmo o que ocorre. O professor é apenas orientador das atividades. O jogo apresenta o conceito de ‘jogo justo’, ou seja, a probabilidade de vitória de cada jogador é a mesma. Esta atividade pode ser feita juntamente com o professor de Física, sendo um momento de interdisciplinaridade entre as duas matérias.

A atividade 6.2 “As médias podem não ser representativas?” relaciona matemática, estatística, probabilidade subjetiva e teoria da decisão. No ensino médio, geralmente o conteúdo de probabilidade é trabalhado logo após estatística. O objetivo dessa atividade é apresentar ao aluno o questionamento: as médias são representativas em todas as situações? Para isso propomos um problema, baseado nas notas bimestrais de matemática de dois alunos, A e B, no decorrer de todo ensino médio e através das medidas de centralidade e de dispersão devemos decidir quem é o melhor aluno a ser indicado para cursar exatas ou área afim. Num primeiro momento os alunos terão somente como informação as notas bimestrais de matemática e terão que fazer a escolha, decidindo quem eles acreditam que será o melhor aluno num curso de exatas, A ou B. Depois de feita a escolha, o professor levanta vários questionamentos, envolvendo probabilidade subjetiva para que os alunos percebam de que nem sempre podemos escolher com exatidão baseando-nos somente nas medidas de centralidade e dispersão. O professor pode dar espaço para que os alunos também levantem suas hipóteses. Após todo o questionamento, a escolha do melhor aluno se manteve ou mudou? Também fazemos referência nessa seção ao cálculo das médias de um conjunto de valores e ao cálculo das médias das médias de grupos de valores. Abordamos esse assunto através de exemplos e situações do cotidiano. Como os livros didáticos do ensino médio apresentam os conceitos relacionados à estatística de forma simples e resumida, oferecemos ao professor de maneira mais abrangente, a teoria envolvendo medidas de centralidade e medidas de dispersão, com o objetivo de esclarecer algumas dúvidas que se possa ter em relação a esse conteúdo e como referência para as aulas.

Na Seção 6.3 escrevemos sobre a atividade Sorte ou Azar. Apesar de ser uma atividade mais simples, salienta a probabilidade de ganharmos num jogo popularmente conhecido como raspadinha. Esse jogo é apreciado por várias pessoas que ao pagarem suas contas mensais em casas lotéricas, muitas vezes adquirem esse bilhete, sem nem mesmo conhecer as chances de ganhar um ou outro prêmio oferecido. Como o estudo de probabilidade teve origem nos jogos de azar, podemos fazer a relação desse jogo com os jogos de azar. Nessa atividade, além da probabilidade clássica, abrangemos também a probabilidade subjetiva ao questionarmos se vale ou não a pena apostar nesse jogo e calculamos para isso o valor esperado de cada um dos bilhetes.

A atividade 6.4 “Ciência Forense e Probabilidade” foi desenvolvida numa feira de ciências por alunos do Ensino Médio. Aliamos probabilidade clássica e subjetiva e o resultado foi bastante satisfatório. Ciência forense é um conteúdo de interesse de muitas pessoas que apreciam séries que envolvem crimes, policiais e mistérios. Ao analisar a cena do crime, no papel de investigador, damos nossa opinião sobre quem é o culpado por um crime ocorrido. Após novas informações apresentadas pela perícia, verificamos se nossa opinião continua a mesma ou não. Essa atividade foi muito bem avaliada e apreciada pelos participantes da feira. Apresentar a ligação da matemática com a ciência forense foi uma novidade tanto para os alunos que elaboraram a atividade quanto para os participantes que puderam opinar e se colocar no papel de investigadores. Oferecemos ao professor um modelo de atividade para que possa desenvolvê-la em feiras com seus alunos. Apontamos os pontos positivos e negativos e temos certeza que cada professor ao aplicá-la poderá enriquecê-la ainda mais com sua criatividade.

A atividade “Qual a melhor decisão?”, na Seção 6.5, trabalha teoria da decisão. Adotamos como base para essa atividade um problema de decisão bem característico de turmas do ensino médio. Como o problema dos cupcakes trata de qual a melhor decisão para conseguir dinheiro e conquistar uma almejada viagem de formatura, o problema sugerido nessa atividade propõe a escolha da viagem. Os alunos deverão decidir se preferem viajar para a praia, hotel fazenda ou para um sítio na própria cidade. Através da probabilidade de chuva ou sol para o final de semana da viagem, deve-se calcular o valor esperado da utilidade para cada uma das viagens e construir a árvore de decisão. A melhor opção será aquela com maior utilidade esperada.

Em várias dessas atividades sugerimos o uso de vídeos do projeto M^3 – Matemática Multimídia da Unicamp. O portal M^3 contém recursos educacionais multimídia para o Ensino Médio de Matemática. Esses vídeos ajudam no desenvolvimento das atividades e são atrativos para os alunos. Na atividade 6.3 fazemos o uso do vídeo “Coisa de Passarinho, na atividade 6.4 sugerimos “O Crime da Rua do Gasômetro” e na atividade 6.5 usamos o vídeo “Brasil x Argentina”.

No Capítulo 7 apresentamos curiosidades biográficas e históricas com o objetivo de fornecer mais informações ao professor. Nele, o leitor pode encontrar a biografia de alguns matemáticos e o contexto histórico nos quais os assuntos tratados neste trabalho estão inseridos.

O Apêndice apresenta um resumo das atividades propostas, como material de apoio para o professor que decidir aplicá-las em suas aulas.

CAPÍTULO 2

PROBABILIDADE: PERCORRENDO A HISTÓRIA

2.1) DEFINIÇÕES PARA PROBABILIDADE

Ao consultar um dicionário encontramos as seguintes definições para probabilidade:

- Qualidade do que é provável. Motivo ou indício, que deixa presumir a verdade ou a possibilidade de um fato, verossimilhança;

-Razão ou indício que faz supor a verdade ou possibilidade de um fato;

-Possibilidade mais acentuada da realização de um acontecimento entre inúmeros observados, baseada subjetivamente na opinião do observador e objetivamente na relação entre o número de casos acontecidos e o total das observações feitas.

Percebemos que a palavra probabilidade está presente em nosso dia-a-dia. Quando acordamos pela manhã e observamos o céu nublado afirmamos que há grande probabilidade de chuva. Uma mulher quando descobre que está grávida, a família toda "aposta" qual será o sexo do bebê. Um jovem vestibulando, ao escolher a universidade e o curso que gostaria de fazer, pode estimar suas chances de conseguir a tão almejada vaga. Quando jogamos na loteria, sabemos que, embora muito pequena, existe uma chance de que o nosso bilhete seja o premiado e até fazemos planos caso isso venha a ocorrer. Um médico ao conhecer um determinado medicamento, seus efeitos e a chance de melhora quando o tratamento é realizado sabe se deve ou não indicá-lo ao paciente.

Enfim, todos nós, diariamente fazemos previsões, e entendemos que podemos atribuir um número que quantifica a chance de algo vir a acontecer.

Para a Matemática, o cálculo das probabilidades é um ramo que estuda os fenômenos aleatórios, ou seja, observações ou experimentos que, quando realizados, não apresentam resultados conhecidos de antemão. A palavra probabilidade é derivada do latim probare, que significa testar ou provar. É muito comum usarmos a palavra provável para indicar algo de que não se tem certeza se vai acontecer. Esta palavra também está associada às palavras sorte, azar, incerto, chance, duvidoso.

Os fenômenos aleatórios estão presentes, inerentemente, em nossa vida cotidiana.

As primeiras manifestações registradas sobre probabilidade referem-se aos jogos de azar, que descreveremos na próxima seção.

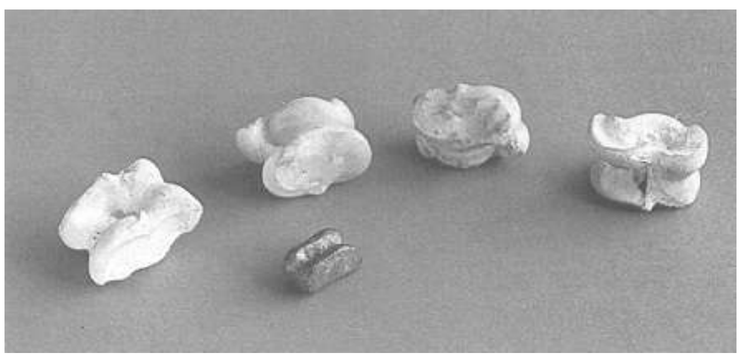
2.2) HISTÓRIA DA PROBABILIDADE: DOS JOGOS DE AZAR À PROBABILIDADE MODERNA

Este capítulo está embasado em [6], [27] e [44].

O cálculo de probabilidades surgiu da necessidade do homem tentar entender ou decifrar os jogos de azar, existentes desde a Antiguidade. O nome jogos de azar é assim definido porque o resultado final não depende somente da habilidade do jogador, mas exclusiva ou predominantemente do acaso.

O mais antigo destes, o jogo de ossos, conhecido como astrágalo (Figura 1), era jogado por várias civilizações, entre estas polinésios e siberianos. Como os ossos não tinham lados idênticos, estudiosos modernos apontam que, em virtude da anatomia do osso, as probabilidades de obter cada um dos lados em um lançamento não são iguais: são de aproximadamente 10% para dois dos lados e de 40% para os outros dois. A jogada de Vênus, a mais importante destas, consistia em jogar 4 astrágalos e cada um destes cair em um lado diferente.

Figura 1 - Astrágalo.



O jogo de ossos é muito semelhante ao jogo de dados atual, outro jogo de azar. O jogo de dados teve origem na Índia e Mesopotâmia (3000 a.C.), e é uma evolução do jogo de ossos. Difundido para o mundo grego, romano e cristão, muitas vezes, era jogado em apostas, previsão do futuro, decisão de disputas e divisão de heranças.

Na antiguidade, acreditava-se muito na superstição e atribuía-se aos deuses a vitória ou a derrota diante de um jogo ou fato. O cálculo de probabilidades poderia, talvez, ter sido desenvolvido mais cedo, porém, estudiosos, em especial os gregos, por acreditarem que o futuro estava nas mãos dos deuses e insistirem na verdade absoluta provada pela lógica, tinham dificuldade em aceitar a aleatoriedade. Algumas frases supostamente ditas por eles revelam a desconfiança em relação à probabilidade: *"Argumentos baseados em probabilidades são impostores. A menos que seja observado* *grande cuidado em seu uso, tendem a ser enganadores" (Símias)* . *"Argumentos baseados apenas em verossimilhança e probabilidade são suficientes para desclassificar qualquer geômetra" (Sócrates)* [27].

Foram os romanos, a primeira civilização a utilizar o processo de aleatoriedade e dar início ao seu desenvolvimento. Os romanos eram mais preocupados com a medição e a contagem do que com a geometria. Marco Túlio Cícero (106 a.C. – 43 a.C.) foi o maior defensor da probabilidade na antiguidade. Em uma de suas frases relatou*: "O homem que joga com frequência acabará por fazer, uma vez ou outra, uma jogada de Vênus: de vez em quando, fará até mesmo duas ou três em sequência. Seremos tolos ao ponto de afirmar que tal coisa ocorreu em virtude da intervenção pessoal de Vênus, e não por puro acaso?"* [27].

Porém, o desenvolvimento do cálculo de probabilidades teve início apenas no século XVI. Kendall resume a demora em relação ao estudo desta área em sua frase: *" A humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos não-causais"* [27].

O italiano Girolamo Cardano (1501-1576) é considerado por muitos como o iniciador do estudo matemático das probabilidades. Foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória para calcular a quantidade de possibilidades favoráveis em um evento aleatório e, assim, calcular a probabilidade da ocorrência de um evento como a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao experimento. Essas técnicas foram escritas em um tratado de 32 capítulos "O livro dos jogos de azar". Um estudo simplificado, porém de grande valia para o desenvolvimento do cálculo de probabilidades. Em seu tratado, Cardano fez um estudo dos jogos em que ele mesmo apostava: dados, gamão, cartas, astrágalos e até xadrez. Para facilitar seus estudos, ele dividiu esses jogos em dois grupos: estratégicos e regidos pelo puro acaso. Muitas vezes ao jogar, Cardano tinha vantagens sobre seus oponentes, pois havia adquirido uma compreensão da possibilidade de vencer em diversas situações. O discernimento de Cardano sobre o funcionamento da aleatoriedade representou uma nova ideia e uma nova metodologia e formou a base da descrição matemática da incerteza pelos séculos que se seguiram. Seu livro não é totalmente correto, em alguns pontos Cardano se equivocou, mas, mesmo assim, sua obra representa um primeiro avanço na tentativa humana de compreender a natureza da incerteza. Além disso, Cardano escreveu numa época em que os encantos místicos eram mais importantes e valiosos que cálculos matemáticos. Ele mesmo se deixava levar por crenças: acreditava que sequências de derrotas ocorriam porque a sorte estava adversa e que uma das maneiras de mudar esse resultado seria jogar os dados com bastante força.

Os italianos Galileu Galilei (1564- 1642) e Tartaglia (1499-1557) também se dedicaram ao estudo da aleatoriedade. Como Cardano, limitaram-se a resolver problemas concretos, estritamente numéricos. Galileu era físico, astrônomo, matemático e filósofo. Chegou a escrever um breve artigo sobre os jogos de azar: "Ideias sobre os jogos de dados" e presumiu que um dado tem probabilidade igual de cair em qualquer um dos seis lados.

Para alguns estudiosos, porém, o cálculo de probabilidades se fortaleceu com os estudos de Pascal, físico e matemático francês (1623-1662), ao tentar resolver o problema. "*Suponha que duas pessoas estão participando de um jogo, com lançamento de dados, em que ambos têm a mesma chance de vencer, e o vencedor é quem atingir primeiro uma determinada quantidade de pontos. O jogo, porém, é interrompido, por algum motivo externo, e um dos jogadores está na liderança. Qual é a maneira mais justa de dividir o dinheiro apostado?"* [27].

Pascal percebeu que os métodos necessários para resolver o problema eram desconhecidos e decidiu pedir ajuda a outro matemático com quem pudesse discutir suas ideias. Em 1654, Pascal e Pierre de Fermat (1601-1662), advogado e um dos maiores matemáticos amadores de todos os tempos, iniciaram um processo de correspondência onde desenvolveram abordagens próprias, resolvendo diversas versões do problema. Pascal encontrou uma abordagem sistemática e generalizável que nos permite calcular a resposta a partir de uma expressão matemática, o famoso triângulo de Pascal.[1] O triângulo de Pascal pode ser usado quando quisermos saber o número de maneiras de selecionar um certo número de objetos de uma coleção.

Não podemos deixar de ressaltar que os estudos de Pascal e Fermat tiveram como base os estudos desenvolvidos por Cardano. Os estudos de Fermat foram baseados no aperfeiçoamento da regra geral de Cardano e na aplicação do cálculo combinatório. Pascal e Fermat foram os pioneiros no estudo de problemas não numéricos de probabilidade.

De qualquer modo, para alguns autores, Cardano continua sendo o pai da probabilidade, já que estudos posteriores, apesar de serem mais completos e minuciosos, foram baseados no seu livro e nos seus escritos.

Outro matemático que também se dedicou ao estudo das probabilidades foi Jacob Bernoulli (1654-1705). Bernoulli, formado em filosofia e teologia, contra a vontade de seus pais estudou

[1]Neste trabalho não escrevemos detalhadamente sobre o triângulo de Pascal. O leitor encontrará mais informações sobre o assunto em [29], capítulo 4 , página 88.

matemática e astronomia, áreas que sempre despertaram seu interesse. Acreditava que, para tomarmos decisões racionais, precisaríamos de um método matemático confiável para determinar probabilidades. Para ele, imaginar que poderíamos ter alguma espécie de conhecimento prévio sobre as probabilidades, ou a priori, nas situações de incerteza seria “insano”. Em vez de depender de probabilidades que nos foram dadas, deveríamos discerni-las através da observação. Para Bernoulli, com o aumento do número de observações, as frequências observadas deveriam ser cada vez mais precisas. Ele foi o primeiro a quantificar essa ideia, a indagar quantos testes seriam necessários e quanta certeza poderia ter.

Um dos exercícios preferidos de Bernoulli era trabalhar com urnas cheias de pedrinhas coloridas. Certa vez, ele vislumbrou uma urna contendo 3 mil pedrinhas brancas e 2 mil pedrinhas pretas. Uma razão de 60% de brancas contra 40% de pretas, e questionou: ao retirar uma série de pedrinhas dessa urna, com reposição, com que precisão devemos esperar que a proporção de pedrinhas brancas retiradas se aproxime de 60%? Através desses experimentos, Bernoulli escreveu a Lei dos Grandes Números[2], também conhecida como Teorema de Bernoulli ou Teorema Áureo. O Teorema de Bernoulli trata de como os resultados refletem as probabilidades quando pode ser obtido um grande número de observações, sob as mesmas condições. Ele afirma que é sempre possível tirar um número suficiente de pedrinhas a ponto de termos quase certeza de que a porcentagem de brancas retiradas será próxima de 60%, por mais exigente que sejamos em nossa definição de próximo. Seu livro *Ars Conjectandi,* ou A Arte da Conjectura, publicado 8 anos após sua morte, teve enorme significado para as probabilidades. Nesse livro, Bernoulli prova a Lei dos Grandes Números, resultado que estabelece uma relação entre os conceitos de probabilidade e frequência relativa. O livro contém ainda considerações sobre esperança matemática e probabilidades a priori e a posteriori.

O cálculo de probabilidades foi introduzido definitivamente no mundo matemático por Laplace (1749 – 1827), físico e matemático francês que publicou Teoria Analítica das Probabilidades, obra que consta dos estudos de Cardano em probabilidade, chamados por ele de princípios. Foi Laplace quem deu início ao período clássico da teoria probabilística, seguido por matemáticos como Poisson, Gauss e Poincaré. Os fundamentos do cálculo de probabilidades foram colocados por Laplace na forma clássica, como é conhecida atualmente e manteve-se inalterada até o início do século XX.

No cotidiano usamos diariamente o cálculo de probabilidade de uma forma intuitiva, Ao acordarmos olhamos o tempo, ouvimos e consultamos a internet sobre a probabilidade de chuva em nossa região para, a partir daí, decidir se levamos ou não o guarda-chuva. Temos uma noção da hora em

[2] Sobre a Lei dos Grandes Números, caso o leitor tiver maior interesse [15] , capítulo 7 ,página 230 ; [28], capítulo 12, página 284.

que devemos sair de casa para o trabalho, escola ou lazer num dia em que a probabilidade do trânsito estar congestionado é grande. Podemos até calcular as chances de o nosso time ser campeão; as probabilidades de passarmos em um concurso público. Em busca de diversão e dinheiro, muitos apostam em loterias, compram os mais diversos jogos oferecidos pelas Casas Lotéricas ou gastam suas moedas em caça-níqueis[3].

Atualmente, o estudo relacionado ao cálculo de probabilidades é de grande importância e possui aplicação em diversas áreas, como estatística, economia, engenharia, física, química, sociologia, psicologia, biologia, entre outros ramos do conhecimento.

Na estatística indutiva, a probabilidade é utilizada na coleta e análise de amostras de uma população para calcular acontecimentos futuros, inferindo, induzindo ou estimando leis de comportamento da população da qual a amostra foi retirada. Os cálculos probabilísticos podem analisar hipóteses sobre as características da população, a partir da análise da amostra representativa dessa população. Os censos, os seguros atuariais, as pesquisas eleitorais, são exemplos da aplicabilidade de probabilidade na estatística.

Um departamento de trânsito não pode prever quais carros se acidentarão em um feriado prolongado, mas pode predizer de modo bastante satisfatório o número de ocorrências de acidentes de carro, baseado em observações passadas. Assim, o departamento pode tentar reduzir o número de novos acidentes através de informações ou projetos com esse objetivo.

Na medicina e na biologia, o estudo de probabilidades está diretamente relacionado, por exemplo,à genética. Na reprodução humana, o material genético de uma criança é a combinação aleatória do material genético de seus pais. Assim, podemos ver uma gravidez como um experimento aleatório com relação ao sexo, à cor dos olhos, tipo de cabelo e muitas outras características físicas. Os testes de DNA, feitos geralmente a partir de amostras de sangue, podem estipular as probabilidades de aparecimento de muitas doenças genéticas hereditárias.

Na análise da decisão, o conceito de probabilidade desempenha um papel central. De posse da estrutura do problema de decisão e das probabilidades dos eventos incertos, podemos determinar as decisões ótimas (em algum sentido) para as preferências básicas do decisor.

[3] O decreto-lei nº 9 215 de 30 de abril de 1 946 proíbe a prática ou exploração de jogos de azar em todo o território nacional. O decreto-lei nº 204 de 27 de fevereiro de 1967 dispõe sobre a exploração de loterias e dá outras providências.

CAPÍTULO 3

CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos sobre probabilidade, como por exemplo, as definições de experimento aleatório, espaço amostral, eventos e as diversas concepções de probabilidade.

3.1) EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Um experimento aleatório é qualquer experimento ou observação, cujo resultado não seja conhecido com certeza. Todo experimento aleatório possui as seguintes características:

- O resultado não pode ser previsto com certeza;
- É possível listar um conjunto de todos os possíveis resultados, a que chamamos de espaço amostral.

Por exemplo, ao jogar uma moeda e observar a face voltada para cima, não se tem certeza se a face obtida será cara ou coroa. Outros experimentos aleatórios bastante comuns são o lançamento de dados, a retirada de bolinhas coloridas de uma urna, a escolha de uma carta de um baralho, o sorteio das dezenas da Mega-Sena, jogo conhecido pelos brasileiros e promovido por um banco estatal federal, em que o jogador pode escolher de 6 (aposta mínima) a 15 números (aposta máxima), dentre 60 números disponíveis de 1 a 60. Neste jogo, o sorteio consiste em 6 dezenas e recebe prêmios, em dinheiro, o apostador que acertar 4, 5 ou 6 dezenas sorteadas. Mesmo repetido um grande número de vezes, em condições idênticas, não é possível prever o resultado.

Podemos tomar outros exemplos do cotidiano como um laboratório que deseja testar o tempo de reação a certo medicamento e, para tanto, ministra este medicamento em vários pacientes, sob as mesmas condições. Não se pode prever o tempo que cada um dos pacientes levará para reagir ao medicamento. Uma situação em que também há presença do experimento aleatório é a medição da quantidade de chuva que cai em uma determinada localidade. Por mais que as observações meteorológicas tornem possível a previsão de tempestade em certa localidade, não é possível dizer com exatidão a quantidade de chuva que irá cair. A previsão do tempo é um fenômeno aleatório, por mais que os meteorologistas façam suas previsões, sabemos que há algo de incerto nelas e por isso recebem este nome.

3.2)ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS

Em um experimento aleatório o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado de **espaço amostral** e é denotado pela letra grega **(Ω)**, lê-se, ômega. O espaço amostral no lançamento de um dado comum é representado pelo conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Um **evento** é um subconjunto do espaço amostral**.** Tomemos como exemplo o lançamento simultâneo de dois dados, um branco e um vermelho e vamos considerar as possibilidades das faces voltadas para cima. O espaço amostral desse lançamento é

$\Omega = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$.

Alguns eventos deste espaço amostral.

A = faces com números iguais nos dois dados = $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.

B = "a soma é 12" = $\{(6,6)\}$. Quando o evento é formado por apenas um elemento do espaço amostral, este é chamado **evento elementar.**

C = "a soma é menor do que 13". B = **Ω**. Neste caso o evento B é o próprio espaço amostral, também chamado **evento certo.**

D = "a soma é 1" = Ø. O evento representado pelo conjunto vazio é chamado **evento impossível.**

Dados dois eventos, dizemos que estes são mutuamente exclusivos quando a intersecção entre estes é igual ao conjunto vazio, e dizemos que são complementares se forem mutuamente exclusivos e sua união for todo o espaço amostral.

Exemplo 1. Considerando os eventos, do espaço amostral **Ω**, lançamento de dois dados e observação das faces voltadas para cima.

E = "a soma é par" = $\{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$.

F = “a soma é ímpar” = {(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5.2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5)}

Observe que E U F = Ω , E ∩ F = Ø. Concluímos que os eventos E e F são mutuamente exclusivos, porque a intersecção entre estes eventos é vazia e são complementares porque, além disso, sua união é o próprio espaço amostral.

3.3) INTERPRETAÇÕES DE PROBABILIDADE

3.3.1) PROBABILIDADE CLÁSSICA

A abordagem clássica foi primeiramente publicada pelo italiano Girolamo Cardano no livro Liber de Ludo Alea em 1525. Essa abordagem para calcular probabilidades é bastante simples e direta, mas só pode ser usada em espaços amostrais equiprováveis, isto é, quando num fenômeno aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma “chance” de ocorrer. A probabilidade de ocorrência de um evento A, indicada por P(A), é um número que mede essa chance. É dado por

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos do evento A}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}.$$

Como consequência imediata da definição, temos $0 \leq P(A) \leq 1$.

Ainda podemos concluir:

- Se A e B são dois eventos mutuamente exclusivos do espaço amostral, então P(A) + P (B) = P(A U B);
- Se a probabilidade na ocorrência de um evento E é igual a 1, ou seja, P(E) = P(Ω) = 1 o evento E é o evento certo;
- Se a probabilidade na ocorrência de um evento F é zero, P(F) = 0, o evento F é o evento impossível.

Retomando o Exemplo 1 sobre o lançamento de dois dados, consideremos o evento A = “obtermos valores iguais nos dois dados” = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}, a probabilidade da ocorrência deste evento é

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0{,}1666.$$

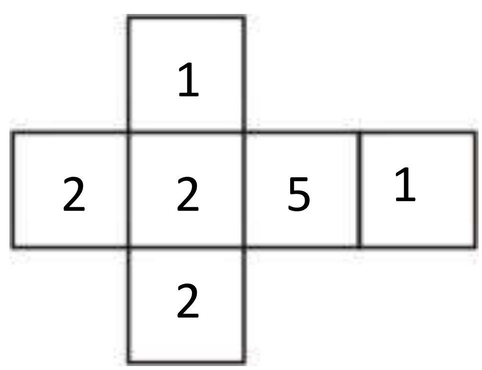
Podemos representar esta probabilidade através de uma fração, por um número decimal ou uma proporção escrita informalmente em forma de porcentagem.

ESPAÇOS AMOSTRAIS EQUIPROVÁVEIS E NÃO EQUIPROVÁVEIS

Quando lançamos um dado comum, com 6 faces numeradas de 1 a 6, o espaço amostral Ω é formado pelos elementos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Podemos concluir que a probabilidade de que a face voltada para cima seja o número 1 é a mesma do que qualquer outra face, supondo que o dado é balanceado e o lançamento não favorece qualquer uma das faces. A probabilidade de tirarmos o número 1 é $\frac{1}{6}$, assim como para os demais resultados. Os mesmos pressupostos podem ser razoáveis quando lançamos uma moeda. A probabilidade de que a face cara esteja voltada para cima é de $\frac{1}{2}$ se são ditos equiprováveis, quando possuem a mesma probabilidade de ocorrer.

Consideremos um dado que tenha dois números 1, três números 2 e um número 5, como mostra a Figura 2. Sejam os A: “ a face obtida é 1”, B: “a face obtida é 2” e C: “ a face obtida é 5”. Estes eventos não possuem a mesma chance de ocorrer, se supomos que este dado é balanceado e o lançamento não favorece qualquer uma das faces.

Figura 2 - Planificação de um dado não balanceado.



De fato, a probabilidade $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cong 0{,}3333$, a de B é $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ e a de C é $P(C) = \frac{1}{6} \cong 0{,}1667$.

Sendo assim se, ao jogarmos esse dado e quisermos prever o resultado é mais razoável arriscar um palpite no número 2, pois a probabilidade de que este ocorra é de $\frac{1}{2}$, maior do que as demais probabilidades. A este dado damos o nome de dado viciado ou dado não balanceado. Como estes eventos não possuem a mesma chance de ocorrer, são denominados de eventos não equiprováveis.

3.3.2) AXIOMAS DE KOLMOGOROV

Kolmogorov, usando os axiomas definidos por ele, conseguiu proporcionar ao cálculo das probabilidades uma base matemática firme.

Dados um experimento e um espaço amostral Ω, uma probabilidade é uma função que atribui a cada evento A um número P(A), denominado probabilidade do evento A, que fornece uma medida da chance de ocorrência de A. Para assegurar que as atribuições de probabilidade sejam consistentes com nossas noções intuitivas de probabilidade, estas atribuições devem satisfazer os axiomas de Kolmogorov.

Para todo espaço amostral Ω e todo evento A_i (com i = 1, 2, 3 ...) deste espaço amostral, são válidos os axiomas.

1: $P(A) \geq 0$

Este axioma reflete a noção intuitiva de que a chance de ocorrência do evento A deve ser não-negativa.

2 : $P(\Omega) = 1$

O espaço amostral é o evento que contém todos os resultados possíveis. O axioma 2 diz que a maior probabilidade possível de ser atribuída a Ω é 1.

3 : Aditividade

3.1) Se A_1 , A_2, A_3, ... , A_k formam um conjunto finito de eventos mutuamente exclusivos, então $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$.

3.2) Se A_1 , A_2, A_3, ... , formam um conjunto infinito enumerável de eventos mutuamente exclusivos, então $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

O axioma 3 formaliza a ideia de que a probabilidade de que ao menos um de diversos eventos ocorra, dado que dois eventos não ocorram simultaneamente, a chance de pelo menos um ocorrer será a soma das chances dos eventos individuais.

Uma função P que satisfaz os axiomas 1, 2 e 3 é chamada de **probabilidade.**

Exemplo 2. Consideremos o lançamento de uma única moeda, com espaço amostral $\Omega = \{K, C\}$. Defina os eventos, K = "a face voltada para cima é cara" e C = "a face voltada para cima é coroa".

Os axiomas especificam que $P(\Omega) = 1$ de forma que, para completar a atribuição de probabilidade, falta apenas determinar P(K) e P(C).

Como K e C são eventos disjuntos e $K \cup C = \Omega$, pelo axioma 3, temos $1 = P(\Omega) = P(K) + P(C)$. Logo, $P(K) = 1 - P(C)$.

A liberdade permitida pelos axiomas nesses experimentos é a probabilidade atribuída a C. Uma possível atribuição de probabilidades é P(C) = 0,5 e P(K) = 0,5 (no caso de uma moeda balanceada); outra atribuição possível é P(C) = 0,75 e P(K) = 0,25 (para moedas não balanceadas). De fato, representar P por qualquer número fixo entre 0 e 1, P(C) = p e P(k) = 1 – p é uma atribuição consistente com os axiomas.

Os axiomas de Kolmogorov tornaram a teoria da probabilidade uma parte autônoma dentro da Matemática e possibilitaram grande avanço científico nessa área, especialmente do ponto de vista teórico. Apesar de ser uma maneira formal de encarar a probabilidade, não existe incompatibilidade entre as ideias de Kolmogorov e os conceitos clássico, frequentista e subjetivista de probabilidade. Muitas propriedades podem ser deduzidas dos axiomas de Kolmogorov. Para um espaço amostral Ω e para quaisquer eventos A e B desse espaço amostral, temos as propriedades.

P1: Dado um evento A, a probabilidade do evento complementar de A é dada por $P(A^c) = 1 - P(A)$, onde A^c é o evento complementar de A.
Como $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$, A e A^c são eventos mutuamente exclusivos pois a intersecção entre estes é o conjunto vazio, tem-se $P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ pelo axioma 3. Conclui-se que $P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.

P2: A probabilidade do evento vazio é igual a zero, $P(\emptyset) = 0$.

O conjunto complementar do espaço amostral Ω é o conjunto vazio, $\Omega^c = \emptyset$ e a união do espaço amostral com seu complementar é o próprio espaço amostral, $\Omega \cup \Omega^c = \Omega$. Sendo assim, Ω e Ω^c são eventos mutuamente exclusivos, porque a intersecção entre eles é vazia.Os axiomas 2 e 3 comprovam a propriedade 2, $P(\Omega) = P(\Omega \cup \Omega^c) = P(\Omega) + P(\Omega^c) \Rightarrow P(\Omega^c)= 0$.

P3: Sejam A e B dois eventos do espaço amostral Ω se $A \subset B \Rightarrow P(B) \geq P(A)$.

O evento A está contido no evento B, se e somente se, o evento B for igual ao evento A união com o evento diferença B\A, onde B\A é o mesmo que o evento B intersecção com o evento A^c, (A^c é o evento complementar de A) e a intersecção do evento A com a diferença B\A deve ser o conjunto vazio. Em símbolos, $A \subset B \Leftrightarrow B = A \cup (B \backslash A)$ e $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$.

Logo, $P(B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$, pois $P(B - A) \geq 0$ pelo axioma 1.

P4: Seja A um evento contido no espaço amostral Ω, logo a probabilidade de ocorrência do evento A será sempre menor ou igual a 1, $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq 1$.

A propriedade 4 é consequência imediata da propriedade 3. Como $A \subset \Omega$, pelo axioma 2 $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) \leq 1$.

P5: Dado o evento $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$, onde $A \cap B$ e $A \backslash B$ são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, a intersecção entre estes é o conjunto vazio, temos $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Logo, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \backslash B) \Rightarrow P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.

P6: Se o evento $B \subset A \Rightarrow P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$.

Da propriedade 5, $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$, se $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$.

Como $P(A \cap B) = P(B)$, temos $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$.

P7: A probabilidade da união dos eventos A e B é igual a soma das probabilidades individuais de A e B menos a probabilidade da intersecção entre os eventos A e B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Sabemos que $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$, como A e B\A são eventos mutuamente exclusivos,

$A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, temos $P(A \cup B) = P(A) + P (B \backslash A)$.

Do mesmo modo, $B = (A \cap B) \cup (B \backslash A) \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(B \backslash A)$.

Segue que $P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash A)$ (1)

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \backslash A) \quad (2)$$

Subtraindo (1) – (2), temos:

$P(AUB) - P(B) = P(A) + P(B\backslash A) - P(A \cap B) - P(B\backslash A)$

$P(AUB) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

Conclui-se que $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3.3.3) PROBABILIDADE FREQUENTISTA

Dado um evento aleatório, desejamos atribuir um número que represente a chance de ocorrência se o experimento fosse realizado. A maneira dita frequentista de determinar a probabilidade de um evento consiste em repetir o experimento aleatório, muitas vezes, anotando a frequência com que o evento ocorre.

Denotemos por n(A) o número de vezes em que o evento A ocorre em n repetições do experimento. A razão $f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$ é denominada frequência relativa de A nas n repetições do experimento.

Se for possível repetir o experimento um grande número de vezes, nas mesmas condições, de modo que as repetições sucessivas não dependam dos resultados anteriores, observa-se que a frequência relativa de ocorrências do evento A tende a uma constante p.

Desta forma, o conceito frequentista estabelece o cálculo de probabilidades por meio de observações sucessivas de um experimento aleatório. A probabilidade pode ser estimada de maneira experimental ou mental e encontrada quando o número de experimentações for repetido por muitas vezes.

A probabilidade de ocorrência do evento A é definida como o limite das frequências relativas de a quando o total de repetições, n, cresce.

No século XVIII, o naturalista francês Conde de Buffon (1707-1788), realizou 4048 lançamentos de uma moeda resultando em 2048 caras. No início do século, por volta de 1900, o inglês Karl Pearson (1857-1936), realizou 24000 lançamentos de uma moeda, obtendo 12012 caras. Percebe-se que a frequência é muito próxima de ½, que é a probabilidade que esperaríamos de obter cara ao lançar uma moeda balanceada.

Exemplo 3. Tomemos o lançamento de dois dados balanceados, observando a face voltada para cima. Consideremos o espaço amostral **Ω**, que consiste de todos os pares ordenados obtidos dessa forma.

Definamos os eventos.

A = "A diferença em módulo entre os valores dos pares ordenados obtidos no lançamento dos dois dados é igual a 1 ou 2".

B = "A diferença em módulo entre os valores dos pares ordenados obtidos no lançamento dos dois dados é igual a 0, 3, 4 ou 5".

Na Tabela 1 representamos as diferenças entre os valores obtidos nos lançamentos dos dois dados, em módulo.

Tabela 1- Diferenças entre os pares ordenados obtidos nos lançamentos de dois dados.

	1	2	3	4	5	6
1	$\lvert 1-1 \rvert = 0$	$\lvert 1-2 \rvert = 1$	$\lvert 1-3 \rvert = 2$	$\lvert 1-4 \rvert = 3$	$\lvert 1-5 \rvert = 4$	$\lvert 1-6 \rvert = 5$
2	$\lvert 2-1 \rvert = 1$	$\lvert 2-2 \rvert = 0$	$\lvert 2-3 \rvert = 1$	$\lvert 2-4 \rvert = 2$	$\lvert 2-5 \rvert = 3$	$\lvert 2-6 \rvert = 4$
3	$\lvert 3-1 \rvert = 2$	$\lvert 3-2 \rvert = 1$	$\lvert 3-3 \rvert = 0$	$\lvert 3-4 \rvert = 1$	$\lvert 3-5 \rvert = 2$	$\lvert 3-6 \rvert = 3$
4	$\lvert 4-1 \rvert = 3$	$\lvert 4-2 \rvert = 2$	$\lvert 4-3 \rvert = 1$	$\lvert 4-4 \rvert = 0$	$\lvert 4-5 \rvert = 1$	$\lvert 4-6 \rvert = 2$
5	$\lvert 5-1 \rvert = 4$	$\lvert 5-2 \rvert = 3$	$\lvert 5-3 \rvert = 2$	$\lvert 5-4 \rvert = 1$	$\lvert 5-5 \rvert = 0$	$\lvert 5-6 \rvert = 1$
6	$\lvert 6-1 \rvert = 5$	$\lvert 6-2 \rvert = 4$	$\lvert 6-3 \rvert = 3$	$\lvert 6-4 \rvert = 2$	$\lvert 6-5 \rvert = 1$	$\lvert 6-6 \rvert = 0$

Desta forma, podemos escrever A = {(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,6), (6,4), (6,5)}, cuja probabilidade de ocorrência P(A) = $\frac{18}{36}$ = $\frac{1}{2}$ = 0,5.

B = {(1,1), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,5), (2,6), (3,3), (3,6), (4,1), (4,4), (5,1), (5,2), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)}, cuja probabilidade de ocorrência é P(B) = $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ = 0,5.

De acordo com a probabilidade frequentista se jogássemos n vezes os dois dados, anotando os lançamentos obtidos nas faces voltadas para cima e calculando suas diferenças em módulo, a frequência do evento A e a do evento B deveriam estar muito próximas de ½. No Capítulo 6, Seção 6.1 na atividade Role os Dados este experimento foi realizado 260 vezes. A frequência absoluta verificada para o evento A foi 133 e a frequência absoluta do evento B foi 127.

A frequência relativa para o evento A foi $f_r(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{133}{260} \cong 0{,}5115$ e a de B foi $f_r(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{127}{260} \cong 0{,}4885$.

Os valores encontrados são coerentes com a definição de probabilidade frequentista baseada na repetição de um experimento aleatório. As frequências dos eventos A e B estão bem próximas do valor clássico para esses eventos considerando o espaço amostral Ω que é equiprovável.

3.3.4) PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Os conceitos sobre probabilidade geométrica apresentados baseiam-se em [40] e [41].

Na probabilidade geométrica são usadas razões entre medidas de figuras geométricas de mesma natureza conservando as propriedades da visão clássica.

A noção de probabilidade geométrica foi introduzida pelo matemático e naturalista francês George Louis Leclerc, o conde de Buffon, já citado na probabilidade frequentista sobre o experimento de lançar moedas. Em 1777, Buffon apresenta em seu livro Essai D'Arithmétique Morale, o problema conhecido como o Problema da Agulha de Buffon: *"Considere uma família de retas paralelas em R^2, onde duas retas paralelas adjacentes arbitrárias distam de a. Tendo-se lançado, ao acaso, sobre o plano, uma agulha de comprimento l ($l \leq a$), qual a probabilidade de que a agulha intercepte uma das retas?"*

Um ponto interessante da solução deste problema é que, ao repetirmos o experimento um grande número de vezes, a frequência do evento se aproxima do número π.

Nesse mesmo livro, Buffon escreve o Jogo dos Discos: "*Em um plano pavimentado com quadrados de lado l é lançado aleatoriamente um disco de diâmetro d. Qual a probabilidade de o disco, depois de pousar no plano, não intersectar e nem tangenciar os lados de quadrado algum?"* Esse jogo era bastante apreciado pelas crianças francesas do século XVIII.

Quando o disco, uma moeda, por exemplo, ao ser lançado sobre o quadrado, um piso qualquer de um cômodo da casa, caía sobre um único quadrado, chamava-se a jogada de "franc-carreau", e era a aposta mais alta do jogo.

APLICAÇÃO DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA ENTRE MEDIDAS DE MESMA NATUREZA

Como a probabilidade geométrica trabalha entre medidas de mesma natureza, os seguintes casos são acessíveis para o aluno do ensino Médio.

Probabilidade envolvendo comprimento: escolha de um ponto de um determinado segmento

Considere um segmento de extremos A e B, e sejam X e Y pontos desse segmento. Consideremos o experimento aleatório de selecionar um ponto ao acaso de $\overline{AB}$, Figura 3. A probabilidade de que este pertença ao segmento $\overline{XY}$ é proporcional ao comprimento de $\overline{XY}$ e não depende da posição dos pontos X e Y sobre $\overline{AB}$.

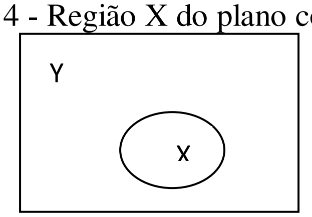
Figura 3- Segmento XY contido no segmento AB.

Sendo assim, selecionado um ponto do segmento $\overline{AB}$, a probabilidade de que este pertença a $\overline{XY}$ será $P(\overline{XY}) = \frac{\text{medida do segmento } \overline{XY}}{\text{medida do segmento } \overline{AB}}$.

Probabilidade envolvendo áreas

Para calcular probabilidade geométrica envolvendo áreas utilizamos as noções básicas de área de figuras planas. Consideremos uma região X do plano, contida em uma região Y, Figura 4.

Figura 4 - Região X do plano contida na região Y.



Ao sortearmos um ponto da região Y, a probabilidade desse ponto pertencer à região X é proporcional à área de X e não depende da posição que X ocupa em Y. Logo, selecionado ao acaso um ponto da região Y, a probabilidade de que este pertença à região X é

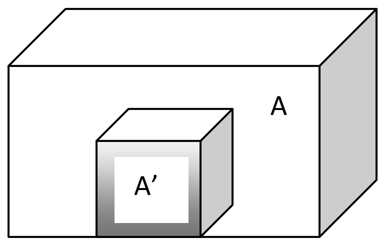
$$P(X) = \frac{\text{medida da área de X}}{\text{medida da área de Y}}.$$

Probabilidade envolvendo volumes

A probabilidade envolvendo volumes tem desenvolvimento análogo às anteriores.

Considere um sólido de volume A e um outro sólido A', contido em A, Figura 5.

Figura 5 - Sólido A' contido no sólido A.



Ao sortearmos um ponto de A, a probabilidade deste ponto pertencer a A' é proporcional ao volume de A' e não depende da posição que A' ocupa em A. Sendo assim, selecionando ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que pertença a A' é $P\left(A'\right) = \frac{\text{volume de } A'}{\text{volume de } A}$.

Exemplo 4. Qual é a probabilidade de que uma pessoa (de olhos vendados), ao arremessar um dardo sobre um alvo, atinja o alvo central, considerando que o alvo possui 50 cm de raio e o disco central possui 10 cm de raio?

Este exemplo está relacionado com a probabilidade envolvendo áreas. Seja Y a área do alvo e X a área do disco central, a probabilidade de sortearmos um ponto de Y e este ponto pertencer à área de X corresponde ao arremesso do dardo quando este acerta o disco central. O lugar em que o dardo atinge o alvo é o ponto selecionado.

Resolução. Sejam os eventos A = "acertar o alvo central" e $\overline{A}$ = "não acertar o alvo central", o evento $\overline{A}$ é o evento complementar do evento A.

Área do círculo menor: $S = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$ cm^2.

Área do círculo maior: $S = \pi R^2 = \pi \cdot 50^2 = 2\,500\pi$ cm^2.

Probabilidade de que a pessoa atinja o alvo central $P(A) = \frac{100\,\pi}{2\,500\,\pi} = \frac{1}{25} = 0{,}04$.

Probabilidade de que a pessoa não atinja o alvo central $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

3.3.5) PROBABILIDADE SUBJETIVA

Para o estudo do tema probabilidade subjetiva nos basearemos em [22], [23], [28] e [36].

A abordagem frequentista de probabilidade aplica-se a fenômenos ou processos com o requisito de que possam ser repetidos, pelo menos conceitualmente, sob as mesmas condições. Entretanto, muitas situações importantes não podem ser concebidas satisfazendo à estrutura de repetições sob condições semelhantes. Por exemplo, ao nos depararmos com perguntas como: qual é a probabilidade de que a economia de nosso país esteja melhor no ano seguinte? Qual é a probabilidade de que eu obtenha sucesso em minha entrevista para um novo emprego? Até mesmo diante de situações corriqueiras, devo levar um casaco ao sair de casa durante a noite num dia de verão, mas com ventos propícios a chuva? Problemas como esses não podem ser solucionados pela abordagem clássica nem pela abordagem frequentista de probabilidade. São problemas abordados pela interpretação subjetiva de probabilidade .

A abordabem subjetivista de probabilidade pode ser aplicada quando nos deparamos com problemas envolvendo incerteza, nos quais temos uma decisão a ser tomada. Em tais situações sabemos que ao decidir não podemos determinar com exatidão todas as implicações da decisão tomada, mas ao usar o conceito de probabilidade, podemos expressar em termos quantitativos a incerteza na situação. Quando usamos a probabilidade deste modo, dizemos que esta expressa o grau de credibilidade racional. É interpretada como uma medida do grau de convicção, de informação, ou como a quantificação do ponto de vista de um indivíduo em particular.

Por James Bernoulli em sua obra Ars Conjectandi [28]:

-O conhecimento que um indivíduo tem em um dado momento à sua disposição, às vezes é insuficiente para obter certeza acerca da ocorrência ou não ocorrência de um possível evento. Sendo assim, o indivíduo pode apenas obter um grau de confiança a respeito do conjunto total de possibilidades apresentadas. O grau de confiança depende do conhecimento que o indivíduo tem a sua disposição, portanto, pode variar de uma pessoa para outra.

- A arte da estimativa consiste em estimar com maior precisão possível, os valores corretos das probabilidades a respeito do conhecimento que se dispõe dos diferentes eventos e obter o máximo de sucesso possível.

- O grau de confiança atribuído à probabilidade depende dos argumentos que temos a favor ou contra o evento.

- O peso de um argumento depende do número de casos em que ele se faz válido, contando que há casos em que pode ocorrer igual probabilidade.

- Exceto nos casos simples de jogos de azar, raras vezes podemos dizer se os diferentes casos são igualmente prováveis ou não, então, poucas vezes podemos atribuir probabilidades corretas a priori.

As ideias de Bernoulli não são subjetivistas, mas não se pode negar que há um grau de subjetivismo nestas.

Também escreveu trabalhos nessa área o matemático italiano Bruno de Finetti (1906 – 1985). Finetti foi o primeiro a tentar axiomatizar a teoria da subjetividade em seus trabalhos publicados em 1931 e 1937. Desde o início do século, alguns filósofos tem tentado estabelecer teses em que as probabilidades atribuídas a uma pessoa aos possíveis eventos de um experimento aleatório são necessariamente de natureza subjetiva.

A teoria subjetivista começou a ser aplicada mais geralmente com o trabalho de Leonard J. Savage (1917 – 1971), matemático e estatístico estadounidense. Sua obra "Os Fundamentos da Estatística", publicada em 1954 trata de forma completa da teoria da subjetividade.

Bruno de Finetti e L. J Savage, no estudo do subjetivismo, propõem uma noção de probabilidade pessoal ou subjetiva onde é possível usar as técnicas estatísticas aceitas até então, propondo métodos de obtenção de probabilidades pessoais aproximadas através das ideias da teoria da decisão estatística. Sendo assim os métodos teóricos de tomada de decisões proporcionam uma nova base para atribuir uma probabilidade pessoal.

Bruno de Finetti afirma que não há necessidade de supor que a probabilidade de algum evento tem um único valor determinado. Seu ponto de vista filosófico é de que a probabilidade expressa a informação de um indivíduo. O trabalho detalhado deste autor é parte importante para o desenvolvimento da probabilidade subjetiva como uma quantificação da incerteza. A probabilidade subjetiva representa até que ponto uma pessoa coerente crê que uma afirmação é certa, baseada em informações disponíveis que possui até aquele momento. Para que o indivíduo seja coerente requer-se que cada avaliação feita seja consistente com cada uma das avaliações restantes relacionadas, tal que não existam contradições entre elas. Estas restrições de coerência asseguram o cumprimento dos axiomas convencionais de probabilidade.

Para Savage, a probabilidade subjetiva mede a confiança que um indivíduo particular tem na verdade de uma proposição, ou pode expressar a opinião de uma pessoa tal como se vê refletida no seu comportamento real ou potencial.

Na prática, a probabilidade subjetiva surge diante de situações do cotidiano. Por exemplo, toda vez que temos que decidir se devemos ou não levar o guarda-chuva, dado que o serviço meteorológico prevê chuva durante o dia, estamos usando probabilidade subjetiva. Diante de decisões, sejam estas importantes em nossa vida ou simplesmente rotineiras, o processo decisório se faz presente.

Sendo assim, a probabilidade subjetiva, expressa pela opinião pessoal, pressupõe a racionalidade das pessoas, bem como leva em consideração fatores não facilmente mensuráveis em termos objetivos: intuição, experiência, vivência, conhecimento e a interação destes fatores.

Neste trabalho, aplicamos o conceito subjetivista nos experimentos “As médias podem não ser significativas?”, “Sorte ou azar?”, “Ciência forense e probabilidade” e “Qual a melhor decisão?”, respectivamente nas seções 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5. No Capítulo 5 apresentamos aspectos da teoria da decisão de forma mais detalhada.

CAPÍTULO 4

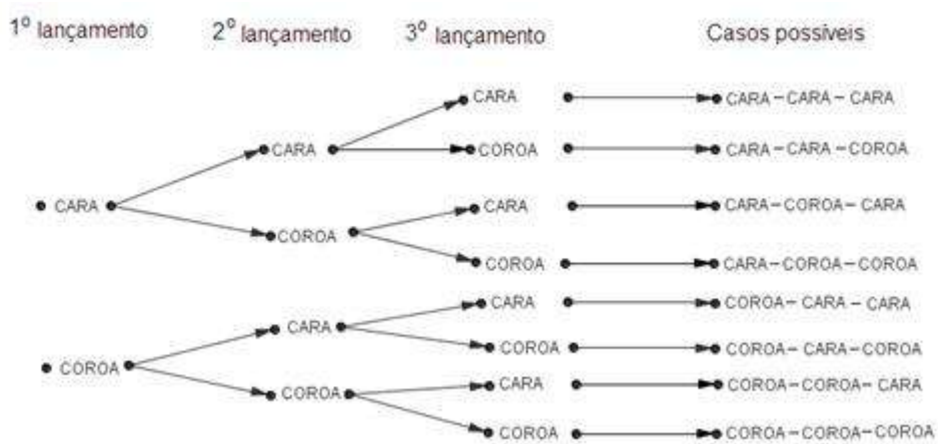
Neste capítulo abordamos os conceitos envolvendo probabilidade condicional, definimos partição do espaço amostral, apresentamos a regra do produto e a regra da probabilidade total, distinguimos eventos independentes de eventos dependentes e abordamos o Teorema de Bayes com alguns exemplos.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Os conceitos mencionados neste capítulo encontram-se, por exemplo, em [15], [26] e [29].

Exemplo 5. Consideremos o lançamento de uma moeda balanceada três vezes, observando as faces voltadas para cima. Indicando por K = cara e C = coroa. O espaço amostral deste experimento tem 8 elementos, Ω = {(KKK), (KKC), (KCK), (KCC), (CKK), (CKC), (CCK), (CCC)}. Podemos representá-lo através do diagrama de árvores, Figura 6, que descreve melhor a situação.

Figura 6 - Diagrama de árvores para o lançamento de uma moeda três vezes.



Tomemos o evento A = "sai cara exatamente duas vezes". Assim, A = {(KKC), (KCK), (CKK)}. A probabilidade de ocorrência do evento A é P(A) = $\frac{3}{8}$. Esta é a probabilidade a 'priori', quer dizer, antes que o experimento se realize.

Agora, suponha que, ao ser lançada a moeda três vezes, foi observado o evento B "o resultado do primeiro lançamento é cara". Qual é a probabilidade de sair cara exatamente duas vezes, levando em conta esta nova informação?

Nossa opinião sobre o evento A se modifica com esta informação, já que, então somente poderá ter ocorrido A se o resultado do experimento tiver cara no primeiro lançamento. Esta opinião é quantificada com a introdução de uma probabilidade a 'posteriori'.

Considerando o evento B, o resultado do primeiro lançamento foi cara. Podemos imaginar intuitivamente que o espaço amostral Ω foi modificado, para $\in = \Omega \cap B = \{(KKK), (KKC), (KCK), (KCC)\}$. Neste novo espaço amostral ∈, o evento com exatamente duas caras possui dois elementos: A' = A ∩ B ={(KKC), (KCK)}. Supondo que todos estes experimentos têm a mesma probabilidade $P(A') = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Sendo assim a probabilidade do evento "sair cara em ambos os lançamentos" foi modificada pela informação do evento condicionante "o resultado do primeiro lançamento foi cara". Neste exemplo sabemos que aconteceu o evento B, este então passa a ser o novo espaço amostral e neste novo espaço amostral, a única parte de A presente é A ∩ B. É uma situação comum na qual temos que calcular a probabilidade de um evento tendo uma nova informação. Este é o conceito de probabilidade condicional.

Definição 1. Dados dois eventos A e B e considerando P(A | B) a probabilidade condicional de A dado a ocorrência do evento B temos

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Devemos notar que este número só está definido quando P(B) > 0, ou seja, o evento B é um evento possível, dado que já ocorreu.

Retomando o exemplo 5, temos $P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ e $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Como $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)(2) = \frac{1}{2}$.

Exemplo 6. Consideremos o lançamento de dois dados balanceados e os eventos A "soma das faces par" e B "soma das faces maior ou igual a 9". Sabemos que ocorreu o evento B, qual a probabilidade de ter ocorrido o evento A?

Queremos calcular P(A | B).

Temos:

A = {(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)}.

B = {(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}.

Sabendo que o evento B ocorreu, a única chance de ter ocorrido A é que tenha ocorrido o evento A ∩ B = { (4,6), (5,5), (6,4), (6,6)} e, neste caso, a probabilidade é igual a $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Ou seja, P(A | B) = $\frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} \Rightarrow \frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

4.1) PARTIÇÃO DO ESPAÇO AMOSTRAL

No experimento “lançamento de um dado balanceado e observação da face voltada para cima”, os eventos A “sai face par” e B “sai face ímpar” formam uma partição do espaço amostral. Os eventos A e B são mutuamente exclusivos, dado que a intersecção entre eles é o conjunto vazio e são complementares, pois além de serem mutuamente exclusivos, a união entre eles resulta no próprio espaço amostral.

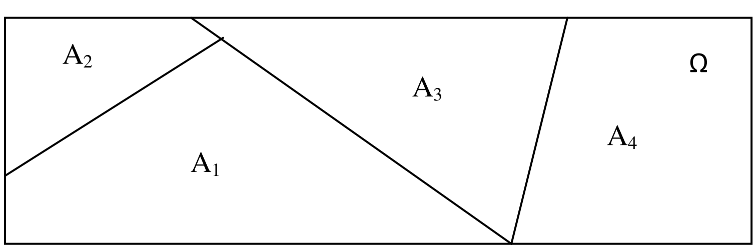
Qualquer que seja o espaço amostral **Ω**, um evento A e seu complementar A^c ou $\overline{A}$ formam uma partição, isto é , A ∩ $\overline{A}$ = Ø e A U $\overline{A}$ = Ω.

Definição 2. Os eventos A_1, A_2, A_3,..., A_n formam uma partição do espaço amostral **Ω**, se, os eventos A_i são disjuntos dois a dois, isto é, se $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall \ i \neq j$;

A união dos eventos A_i é o espaço amostral **Ω**, isto é $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

A Figura 7 apresenta um exemplo de uma partição com 4 eventos, pois os eventos são disjuntos dois a dois e a união entre estes é o próprio espaço amostral.

Figura 7 - Partição de um espaço amostral com quatro eventos.



4.2) REGRA DO PRODUTO

A definição de probabilidade condicional leva a um resultado importante, conhecido como regra do produto. Este resultado nos permite calcular a probabilidade da intersecção de dois eventos e é muito útil para modelar experimentos que têm caráter sequencial, isto é, que são executados em etapas, uma seguida da outra.

Regra do produto para dois eventos

Definição 3. A regra do produto para dois eventos, sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Então $P(A \cap B) = \begin{cases} P(B)P(A \mid B) \\ P(A)P(B \mid A) \end{cases}$.

Exemplo 7. Se um avião está presente em determinada área, um radar detecta sua presença com probabilidade 0,99. No entanto, se o avião não está presente, o radar detecta erradamente a presença de um avião com probabilidade 0,02. A probabilidade de um avião estar presente nesta área é de 0,05. Qual é a probabilidade de um falso alarme? Qual é a probabilidade de o radar deixar de detectar um avião, sem saber, a priori, se o avião está na área ou não? Note que estes são os dois erros possíveis nesta situação.

Resolução. Definimos os seguintes eventos:

A = “avião presente”.

D = “radar detecta presença do avião”.

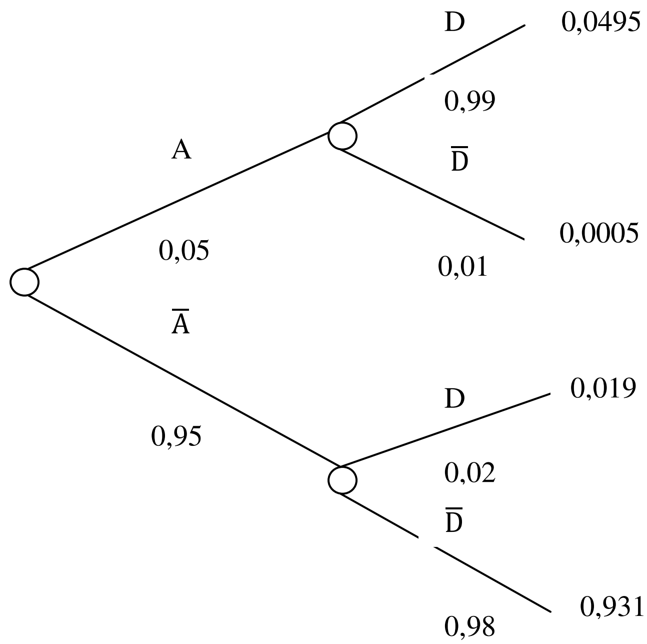
Os eventos complementares são:

$\overline{A}$= “avião não está presente”.

$\overline{D}$ = “radar não detecta avião”.

O diagrama de árvore, Figura 8, ilustra as situações descritas. Este representa a cronologia real dos acontecimentos. Na construção da árvore as probabilidades indicadas são condicionadas aos estados de informação correspondentes a cada nó. Notemos também que, em cada ramificação, as probabilidades apresentam soma unitária. Obviamente, as quatro possibilidades indicadas nos pontos terminais da árvore, cuja soma também é unitária, correspondem, respectivamente aos eventos $A \cap D$, $A \cap \overline{D}$, $\overline{A} \cap D$ e $\overline{A} \cap D$ e podem ser determinadas pela regra do produto.

Figura 8 - Diagrama de árvore.



Pela regra do produto, temos

$$P(A \cap D) = P(A)P(D \mid A) = (0{,}05)(0{,}99) = 0{,}0495.$$

$$P(A \cap \overline{D}) = P(A)P(\overline{D} \mid A) = (0{,}05)(0{,}01) = 0{,}0005.$$

$$P(\overline{A} \cap D) = P(\overline{A})P(D \mid \overline{A}) = (0{,}95)(0{,}02) = 0{,}019.$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{D}) = P(\overline{A})P(\overline{D} \mid \overline{A}) = (0{,}95)(0{,}98) = 0{,}931.$$

O problema levanta dois questionamentos. O primeiro é o cálculo da probabilidade de um falso alarme e o segundo é o cálculo da probabilidade do radar deixar de detectar o avião. Qual é a probabilidade de um falso alarme, ou seja, o radar detecta o avião, mas este não está presente?

Basta calcularmos, $P(\overline{A} \cap D) = P(\overline{A})\, P(D \mid \overline{A}) = (0{,}95)(0{,}02) = 0{,}019$.

Qual é a probabilidade do radar deixar de detectar o avião?

Esta probabilidade é dada por, $P(A \cap \overline{D}) = P(A)\, P(\overline{D} \mid A) = (0{,}05)(0{,}01) = 0{,}0005$.

Podemos generalizar a regra do produto para três eventos, que é dada por

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap A)} = P(A)\, \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(B \cap A)}$.

Aplicando a definição de probabilidade condicional, resulta que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B \mid A)\, P(C \mid B \cap A).$$

Dados A_1, A_2, A_3, ..., A_k eventos de um espaço amostral Ω. Então, a regra do produto geral é dada por

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid P(A_1 \cap A_2)) \ldots P(A_n \mid (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})).$$

Demonstração

A demonstração é feita através da indução sobre n. O caso n = 1 é imediato.

Suponha que n = 2, então

$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}$ o que implica $P(A_2 \cap A_1) = P(A_1) \,.\, P(A_2 \mid A_1)$.

Suponhamos, então que a igualdade é válida para n = m:

$P(A_{m+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_m) = \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_m \cap A_{m+1})}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_m)}$ logo,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_m \cap A_{m+1}) &= P(A_1 \cap \ldots \cap A_m) \,.\, P(A_{m+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_m) \\ &= P(A_1).\, P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_{m+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_m) \end{aligned}$$

A segunda igualdade é justificada através da hipótese de indução.

4.3) EVENTOS INDEPENDENTES

Consideremos um baralho comum com 52 cartas, 13 de cada naipe, do qual será retirada uma carta. Todas as cartas são igualmente prováveis.

Definimos os eventos,

E = “a carta retirada é de espada”

D = “a carta retirada é uma dama”

P = “a carta retirada é preta”.

Temos que $P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(D) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ e $P(P) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

Quais as probabilidades, retirada de uma dama sabendo-se que a carta escolhida é de espada e sair uma carta preta sabendo-se que a carta escolhida é de espada? No primeiro caso queremos calcular $P(D \mid E)$ e no segundo caso $P(P \mid E)$.

Temos, $P(D \mid E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Concluímos que $P(D \mid E) = P(D)$.

No segundo caso $P(P \mid E) = \frac{P(P \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E)}{P(E)} = 1$.

Concluímos que $P(P \mid E)$ é diferente de $P(P)$, pois $P(P) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ e $P(P \mid E) = 1$.

Para o primeiro caso, a informação que a carta escolhida é de espada não acrescentou informação útil para avaliarmos a probabilidade de sair dama, ou seja, saber ou não que a carta retirada é de espada não altera a probabilidade de sair dama. Já no segundo caso, saber que saiu carta de espada faz com que a chance de sair carta preta seja alterada. Estes exemplos ilustram o conceito de eventos independentes e dependentes. No primeiro caso, dizemos que os eventos D e E são independentes, o conhecimento da ocorrência de E não ajuda para reavaliarmos a probabilidade de D. No segundo caso, os eventos P e E são dependentes, o conhecimento da ocorrência de E altera a probabilidade de P.

Definição 4. Sejam A e B eventos definidos em um espaço amostral Ω. Então, A e B são independentes se

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Esta definição tem algumas implicações importantes.

A primeira que devemos ressaltar é a seguinte $P(A \mid B) = P(A) \Rightarrow P(B \mid A) = P(B)$.

De fato, $P(A \mid B) = P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \Rightarrow$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

A segunda implicação é a seguinte, se A e B são independentes, então $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. A recíproca dessa afirmativa também é verdadeira, ou seja, se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ então A e B são independentes.

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow$ A e B são independentes.

Este resultado nos permite estabelecer outra definição equivalente para a independência de dois eventos.

Definição 5. Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Então, A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Algumas propriedades importantes:

P1) Eventos de probabilidade zero ou um são independentes de qualquer outro.

Se $P(A) = 0 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$ e A e B são independentes, pois

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0.P(B) = 0$.

P2) Se $P(B) = 1$, então $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^C)$ e, como $A \cap B^C$ implica $P(A \cap B^C) \leq P(B^C) = 0$, temos $P(A \cap B^C) = 0$ e $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Logo A e B são independentes.

P3) Se $A \cap B = \emptyset$, então A e B não são independentes a menos que um destes tenha probabilidade zero.

Exemplo 8. Consideremos o experimento lançamento de um dado balanceado e observação da face voltada para cima.

Conhecemos o espaço amostral para o lançamento de um dado balanceado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Seja A o evento "observa-se um número par", $A = \{2, 4, 6\}$ e B o evento "observa-se um número ímpar", $B = \{1, 3, 5\}$.

Os eventos A e B não são independentes. Sabemos que $A \cap B = \emptyset$, pois os eventos A e B são mutuamente exclusivos, logo $P(A \cap B) = 0$.

A probabilidade de ocorrência do evento A é $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e a probabilidade da ocorrência do evento B é dada por $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Temos, $P(A)P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ e $P(A \cap B) = 0$.

Concluímos que $P(A \cap B)$ é diferente de $P(A)P(B)$ o que comprova o fato dos eventos A e B não serem independentes.

O fato dos eventos serem mutuamente exclusivos não implica serem independentes. É muito comum confundirmos independência com eventos mutuamente exclusivos. De acordo com a propriedade P3, se $A \cap B$ é igual ao conjunto vazio, os eventos A e B só serão independentes se um destes tiver probabilidade zero.

Exemplo 9. Tomemos o experimento já citado considerando o lançamento de um dado balanceado e os seguintes eventos.

A = "o resultado é par", A = { 2, 4, 6},

C = "o resultado é maior do que 4" , C = { 5, 6},

D = "o resultado é um múltiplo de 3", D = { 3, 6}.

As probabilidades para cada um dos eventos são, $P(A) = \frac{1}{2}$ e $P(C) = P(D) = \frac{1}{3}$.

Os eventos A e C e também os eventos C e D, ocorrerão simultaneamente quando o resultado do lançamento for 6. Segue-se que $P(A \cap C) = P(C \cap D) = \frac{1}{6}$.

A comparação destes valores com os produtos das probabilidades individuais mostram que os eventos A e C são independentes enquanto que os eventos C e D são dependentes.

Sabemos que se, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ os eventos A e C são independentes.

Temos $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ e $P(A)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$, o que comprova o fato de A e C serem independentes.

Para que C e D sejam independentes, devemos ter $P(C \cap D) = P(C)P(D)$.

A probabilidade de $P(C \cap D) = \frac{1}{6}$ e $P(C)P(D) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$.

Como $P(C \cap D) \neq P(C)P(D)$, os eventos C e D não são independentes.

4.4) REGRA DA PROBABILIDADE TOTAL

A regra da probabilidade total tem diversas aplicações envolvendo a tomada de decisão. Resulta diretamente da definição de probabilidade condicional e das propriedades vistas para a probabilidade.

Exemplo 10. Um piloto de fórmula I tem probabilidade de 0,5 vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 0,25. Se o serviço meteorológico estimar em 0,3 a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste ganhar a corrida?

Resolução. Definimos os eventos G "ganhar a corrida", C "chover" e N "não chover".

Temos as seguintes informações:

Probabilidade de ganhar a corrida em dia de chuva $P(G|C) = 0,5$;

Probabilidade de ganhar a corrida em dia sem chuva $P(G|N) = 0,25$;

Probabilidade de chuva $P(C) = 0,3$, logo a probabilidade de não chover é $P(N) = 0,7$;

Queremos a chance de o piloto ganhar a corrida com ou sem chuva:

$P(G) = P(G \cap C) + P(G \cap N)$.

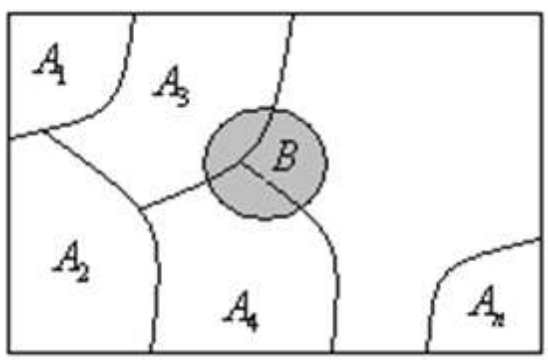
Temos que $P(G) = P(G|C)P(C) + P(G|N)P(N)$.

$P(G) = (0,5)(0,3) + (0,25)(0,70)$

$P(G) = 0,325$ ou 32,5%.

Definição 6. Considerando $A_1, A_2,...,A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω, como mostra a Figura 9.

Figura 9 - Partição de um espaço amostral.



Como a união de todos os $A_{i's}$ resulta no espaço amostral, segue que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B).$$

O fato de alguns destes termos serem o conjunto vazio não invalida o resultado, uma vez que $A \cup \emptyset = A$. Por definição de partição, os $A_{i's}$, com $i = 1, 2, ..., n$, são mutuamente exclusivos dois a dois, logo os eventos $A_i \cap B$ também o são. Então, pela probabilidade de eventos mutuamente exclusivos, podemos escrever

$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... (A_n \cap B)] = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$.

Pela regra do produto, temos

$$\mathbf{P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)P(B \mid A_n).}$$

Este resultado é conhecido como regra da probabilidade total.

Definição 7. Seja A_1, A_2, ..., A_n uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω. Então

$$\mathbf{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i).}$$

Como visto, a probabilidade $P(A_i)$ é denominada probabilidade 'a priori' do evento A_i, com i = 1, 2,..., n. Suponha que B tenha ocorrido. Usando esta informação podemos calcular a probabilidade 'a posteriori' do evento A_i, ou seja, calcular $P(A_i \mid B)$. Por definição, de acordo com a probabilidade condicional, temos que $P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$.

Usando a regra do produto e a regra da probabilidade total

$$\mathbf{P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}.}$$

Este resultado é conhecido como teorema de Bayes, descreveremos sobre ele na próxima seção e daremos alguns exemplos para facilitar a compreensão.

4.5) TEOREMA DE BAYES

Os conceitos sobre teorema de Bayes estão apresentados em [1], [8], [9], [10], [21] e [31].

O teorema de Bayes permite calcular as probabilidades dos vários eventos A_1, A_2, ..., A_n que podem ser a causa da ocorrência do evento B. Devido a isto, o teorema de Bayes é também conhecido como teorema da probabilidade das causas.

Definição 8. Seja A_1, A_2, ..., A_n uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento não vazio em Ω. Então

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dessa forma estamos calculando a probabilidade $P(A_i \mid B)$ como sendo a probabilidade de ocorrer o evento A_i sabendo que o evento B já ocorreu. O número $P(A_i)$ é denominado probabilidade a priori do evento A_i e $P(A_i \mid B)$ é denominado a posteriori do evento A_i.

Demonstração. Da definição de probabilidade condicional temos

$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$. (I)

O numerador da expressão (I) pode ser reescrito pela regra do produto, condicionado à A_i, isto é $P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i) = P(B \mid A_i)\, P(A_i)$.

Para completar a demonstração, podemos escrever o denominador da expressão (I) da seguinte forma $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)\, P(A_j)$.

Concluímos que $P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)\, P(A_j)}$.

Exemplo 11. Suponha que numa população qualquer a cada 1000 pessoas consultadas, 6 pessoas possuem a doença X. Cientistas já descobriram que, se alguém tem essa doença, existem 92% de probabilidade de que um exame de sangue dê positivo para X e 8% de chances de que dê negativo. Descobriram também que, se alguém não tem a doença X, existem 0,5% de probabilidade de que o exame de sangue dê positivo para X. Suponha também que ao escolher uma pessoa dessa população ao acaso e realizar nela um exame de sangue obtenho positivo. Qual é a probabilidade de que essa pessoa tenha de fato a doença?

Resolução. Sejam os eventos

T " tem a doença X"

O "positivo para a doença X".

Os eventos complementares são

$\overline{T}$ "não tem a doença X"

$\overline{O}$ "negativo para a doença X".

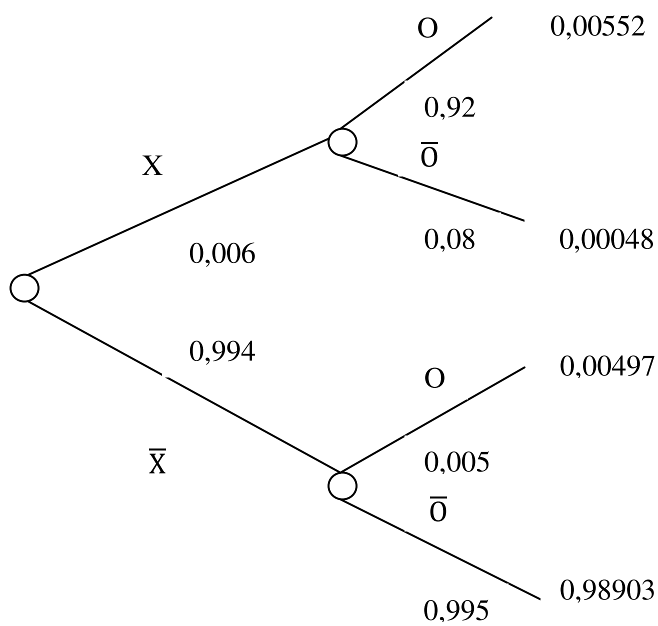
Sabemos que

$P(T) = 0{,}006$ $\qquad P(O) = 0{,}92$

$P(\overline{T}) = 0{,}994$ $\qquad P(\overline{O}) = 0{,}08$.

Podemos representar o problema através do diagrama conhecido como árvore das probabilidades, conforme Figura 10. Neste diagrama, primeiro estabelecemos se a pessoa é ou não portadora da doença X, temos assim dois ramos. De cada um desses ramos emanam mais dois ramos, que apresentam as probabilidades de o exame dar positivo para a doença X ou dar negativo para a doença X. No final de cada um dos quatro ramos formados temos as probabilidades correspondentes a cada um dos eventos, ter a doença e o teste dar positivo, ter a doença e o teste dar negativo, não ter a doença e o teste dar positivo e, não ter a doença e o teste dar negativo. O cálculo destas probabilidades é feito através da regra do produto.

Figura 10 - Árvore das probabilidades.



Observando a Figura 10, podemos responder facilmente à pergunta do problema: se escolho uma pessoa ao acaso e obtenho positivo para a doença X, qual a probabilidade de que ela tenha de fato a doença X?

As probabilidades para positivo em relação à doença X são 0,00552 para quem tem a doença X e 0,00497 para quem não tem a doença X.

Aplicando o teorema de Bayes

$$\mathbf{P(X \mid P) = \frac{P(P|X)P(X)}{P(P|X)P(X)+P(P|\bar{X})P(\bar{X})}}$$

$$P(X \mid P) = \frac{(0{,}92)(0{,}006)}{(0{,}92)(0{,}006)+(0{,}005)(0{,}994)} \cong 0{,}5262.$$

Exemplo 12. Retomaremos o Exemplo 7 da seção 4.2 , aplicando o teorema de Bayes.

Se um avião está presente em determinada área, um radar detecta sua presença com probabilidade 0,99. No entanto, se o avião não está presente, o radar detecta erradamente a presença de um avião com probabilidade 0,02. A probabilidade de um avião estar presente nesta área é de 0,05. Sabendo-se que o radar detectou a presença do avião, qual é a probabilidade de que o avião esteja realmente presente?

Resolução. Analisando o diagrama de árvores construído na seção 4.2, Figura 8 e considerando o teorema de Bayes, a probabilidade pedida é

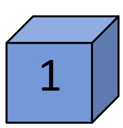
$$P(A \mid D) = \frac{P(D|A).P(A)}{P(D|A)P(A)+P(D|\bar{A}).P(\bar{A})}$$

$$P(A \mid D) = \frac{(0,99)(0,05)}{(0,99)(0,05)+(0,02)(0,95)} \cong 0,7226.$$

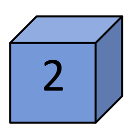
Exemplo 13. Duas caixas idênticas enumeradas com os números 1e 2 possuem bolinhas em seu interior. As bolinhas também são idênticas em relação ao formato e diferem externamente entre si apenas pela cor. A caixa 1 possui 10 bolinhas vermelhas e 2 bolinhas pretas. A caixa 2 possui 8 bolinhas vermelhas e 4 bolinhas pretas.

Escolhendo-se aleatoriamente uma das caixas e sorteando-se uma das bolas, qual é a probabilidade de sortearmos uma bola preta? Sabendo-se que a bola sorteada é da cor preta, qual é a probabilidade de que tenha sido retirada da caixa 2?

Resolução. Consideremos os eventos, A “sortear caixa 1”, B “sortear caixa 2”, V “sortear bola vermelha” e P “sortear bola preta”.



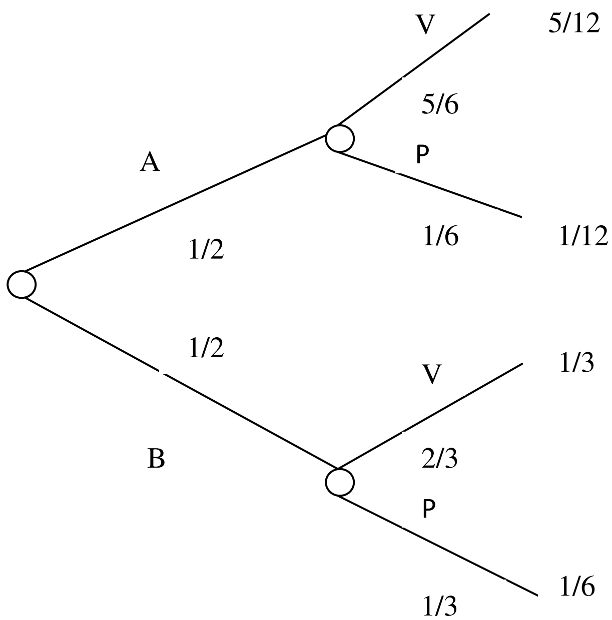
$P(A) = \frac{1}{2}$



$P(B) = \frac{1}{2}$.

A árvore das probabilidades para o problema está representada pela Figura 11.

Figura 11 - Árvore das probabilidades.



A primeira ramificação da árvore indica a probabilidade de retirada de cada uma das caixas, como são duas caixas temos a probabilidade de $\frac{1}{2}$ para cada uma delas. Do ramo da caixa 1, indicado pelo evento A emanam dois ramos com as probabilidades de se sortearem bolas vermelhas e pretas contidas nessa urna. Temos 10 bolas vermelhas e 2 bolas pretas, então as probabilidades de retirada de bola vermelha e retirada de bola preta da urna 1 são dadas, respectivamente por $\frac{5}{12}$ e $\frac{1}{12}$. Do ramo da caixa 2, também emanam dois ramos com as probabilidades das retiradas de bolas vermelhas e pretas desta urna, indicadas, respectivamente por $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$. A soma das probabilidades, em cada ramificação, é sempre igual a um.

Para responder a primeira pergunta, qual é a probabilidade de retirarmos bola preta, basta aplicarmos a regra da probabilidade total.

$P(P) = P(P \mid A)P(A) + P(P \mid B)P(B) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = 0{,}25.$

A probabilidade de retirarmos bola preta é igual a 0,25.

Para responder a segunda pergunta, sabendo que a bola retirada é da cor preta, qual a probabilidade de que a caixa escolhida seja a de número 2, usamos o teorema de Bayes.

$$P(B \mid P) = \frac{P(B).P(P \mid B)}{P(B).P(P \mid B) + P(A).P(P \mid A)}$$

$$P(B \mid P) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{12}} = \frac{2}{3} \cong 0{,}6667.$$

CAPÍTULO 5

TEORIA DA DECISÃO

Este capítulo está embasado em [1], [2] ,[4], [7], [14], [17], [19], [23], [28].

5.1) EXPLICAÇÃO PRÁTICA DA TEORIA DA DECISÃO

"A análise de Decisão não é uma teoria descritiva ou explicativa, uma vez que não faz parte de seus objetivos descrever ou explicitar como e porquê as pessoas (ou instituições) agem de determinada forma ou tomam certas decisões. Pelo contrário, trata-se de uma teoria prescritiva ou normativa no sentido de pretender ajudar as pessoas a tomarem decisões melhores face as suas preferências básicas"[1].

Em termos mais simples, diariamente tomamos decisões. Na maioria dos casos, porém, não tomamos consciência que estamos fazendo escolhas, por envolver situações triviais. Por exemplo, se vamos visitar uma amiga que acabou de ter bebê, escolhemos ou não uma lembrancinha para o bebê, decidimos o melhor horário para a visita, qual o meio de transporte que vamos utilizar, até a roupa que iremos vestir para o dia da visita requer uma decisão. Fazemos essas escolhas e muitas outras durante a nossa vida quase que inconscientemente, sem nos debatermos entre as várias opções, visto que já estamos acostumados com esse tipo de conduta. Os pequenos atos do dia-a-dia e suas possíveis escolhas não nos incomodam e passam despercebidos, devido ao pequeno risco que supomos estar correndo, ou seja, às perdas decorrentes de uma decisão errada num determinado momento são consideradas irrelevantes.

Em várias outras situações, porém, a escolha a ser tomada não é um processo simples e rotineiro e o risco nem sempre é imperceptível. O risco pode ser grande e, por isso, as tomadas de decisões nesses casos, devem ser analisadas e repensadas. Mesmo após muita reflexão, a tomada de decisão, pode nos trazer sofrimento. São as tomadas de decisões em ambientes de insegurança as mais interessantes; nesses momentos, o risco é considerado grande e as perdas não são desprezíveis.

A Análise da Decisão possibilita a resolução de problemas mais complexos. Reunindo um conjunto de conceitos e técnicas quantitativas que facilitam o tratamento lógico de situações envolvendo incerteza, permite que tomemos decisões.

5.2) UMA BREVE HISTÓRIA DA TEORIA DA DECISÃO

Em toda Mesopotâmia, no Egito, no Império Romano, na Grécia Antiga e nos países orientais são encontrados vestígios muito antigos de mecanismos para adivinhar, decidir ou tirar a sorte. Esses três pontos tem em comum a tentativa de tentar descobrir o futuro. Mas como prever o futuro? Em um primeiro momento, esta tentativa surge através de instrumentos aleatorizadores (dados, palitos, roletas) que eram utilizados pelos povos primitivos para três orientações básicas [2]:

- garantir a justiça, pois todas as partes envolvidas teriam a mesma probabilidade de saírem vencedoras;
- evitar o conflito, porque sempre que a decisão se transfere para um desses instrumentos a discórdia acaba, pois já não está em jogo quem está com a razão;
- obter a orientação divina, sempre que a moeda é jogada para o alto. Por exemplo, há uma crença popular que o resultado faz parte da vontade de Deus. Relatos descrevem que era comum o decisor olhar para o céu antes de tirar a sorte, provavelmente tentando uma conexão com a divindade.

Percebe-se que a crença de que a aleatoriedade está ligada à vontade divina, durante muito tempo adiou a responsabilidade humana na hora de tomar alguma decisão. No momento em que as várias crenças religiosas vão sucumbindo ao cristianismo, pregadora de um Deus único, uma mudança de percepção vem à tona: o futuro da vida na terra continua um mistério, mas passa a ser regido por apenas um poder cujas intenções e padrões eram claros a todos que se desse ao trabalho de aprendê-los, lendo e estudando seus ensinamentos (Bíblia). Nesse momento ainda não há espaço para especulação matemática no campo da 'previsão do futuro'[4].

A substituição das crenças baseadas em orientação divina pela probabilidade sistemática e sua sugestão de que o futuro poderia ser previsível ou até mesmo controlável, surge quando o homem percebe que deveria caminhar com seus próprios pés. O surgimento da numeração indo-arábica, o Renascimento e a Reforma Protestante influenciaram a intenção humana em prever o futuro e tomar decisões [4].

Com o desenvolvimento da teoria das probabilidades podemos dizer que Pascal, no século XVII foi o responsável por formular a primeira teoria matemática sobre a análise da decisão. Pascal queria estabelecer a correlação de levar uma vida mundana ou uma vida devotada a Deus. A incógnita quanto à existência divina motivou-o a criar o princípio da esperança ou expectância matemática. Tal princípio levou Pascal a defender a fé em Deus em tons pragmáticos. Pascal atribuiu uma probabilidade de $\alpha \neq 0$ para a existência de Deus e de $1- \alpha$ para a não existência de Deus. Em sua teoria, o valor esperado (ou esperança matemática) de levar uma vida pia seria maior do que o valor esperado para levar uma vida mundana; independente de qualquer que seja a probabilidade de Deus existir.[4]

Apesar deste princípio não ser capaz de levar em conta possíveis atitudes dos indivíduos frente ao risco, este foi o primeiro princípio matemático que levou em conta decisões em contexto de incerteza, também chamado de contexto de risco. É caracterizado por uma situação em que o tomador de decisão não tem conhecimento exato dos resultados de sua ação, conhecendo apenas as probabilidades destes resultados.

O princípio da "esperança matemática", apesar de se mostrar útil na descrição de algumas escolhas, apresentava alguns problemas de aplicabilidade a algumas situações. Em 1738, Daniel Bernoulli apresentou o paradoxo de São Petersburgo[5], para mostrar que o princípio da "esperança matemática" não é obedecido invariavelmente e a solução proposta pelo autor para esse paradoxo é considerado o marco inicial da Teoria da Decisão. Bernoulli estudou eventos aleatórios, não se concentrando nos eventos em si, mas nos seres humanos que desejam ou temem certos resultados em maior ou menor grau. Sua meta era criar instrumentos matemáticos que permitissem a qualquer um estimar suas chances em empreitadas de risco à luz de suas circunstâncias financeiras específicas [7].

No século XIX o matemático Gauss (1777-1855), também contribuiu para o desenvolvimento da teoria da decisão, estudando a curva do sino, ou curva de Gauss[6], criando uma estrutura para a compreensão da ocorrência de eventos aleatórios.

Atualmente o processo decisório é muito utilizado em empresas. Representando uma pequena onda numa corrente de pensamento nascida num tempo em que o homem, diante da incerteza, buscava orientação nos astros. Saber quem toma decisões, e de que modo, é o que deu forma a sistemas de governo, justiça e ordem social mundo afora.

O estudo da teoria da decisão é uma mescla de várias disciplinas, como matemática, sociologia, psicologia, economia, ciências políticas, direito, etc. A filosofia reflete sobre o que uma decisão revela

---

[4] Ver neste trabalho, capítulo 7, 7.3 – Pascal e o princípio da expectância matemática.
[5] Ver neste trabalho, capítulo 7, 7.4 – Bernoulli e o Paradoxo de são Petesburgo.
[6] Veja sobre a curva de Gauss [15] , capítulo 5, seção 5.2 ou neste trabalho seção 6.2.5.

sobre nosso eu e nossos valores. A história mostra a decisão tomada por líderes em momentos críticos. A administração estuda o risco e o comportamento organizacional ajudando o administrador a obter melhores resultados. A matemática auxilia todas essas áreas através de seus algoritmos e cálculos, mostrando qual a melhor decisão a ser tomada considerando-se alguns critérios de escolha.

5.3) CARACTERIZAÇÃO DOS PROBLEMAS DE DECISÃO

Decidir é o ato de selecionar uma linha de ação preferida entre várias alternativas existentes. Existem diversos instrumentos que podem contribuir para a tomada de decisões, como modelos matemáticos, meios computacionais e até mesmo conhecimentos de psicologia e filosofia. O ato de decidir está diretamente ligado ao ambiente cultural e organizacional do processo envolvido e fatores como a intuição, experiência e aspectos emotivos também devem ser considerados ao se tomar uma decisão.

A análise da decisão representa uma abordagem geral a problemas decisórios e oferece um conjunto de técnicas e conceitos para apoiar o decisor a fazer a melhor escolha. Visa uma decisão racional e consistente, mesmo em condições de aleatoriedade e incerteza.

Os processos de análise e exploração envolvidos em tomada de decisão contem um conjunto de características gerais. O seu conhecimento beneficiará a escolha. Nesse processo é necessário considerar:

Decisor

Agente, responsável pela decisão a ser tomada e ser racional, capaz de explicitar suas preferências em relação aos possíveis resultados de suas decisões. O decisor pode ser uma pessoa ou um grupo de pessoas que tem autoridade e responsabilidade pela escolha da alternativa a ser seguida. Um decisor é capaz de revelar apenas a alternativa que mais se aproxima de sua realidade, pois está sujeito à racionalidade humana e à imperfeição das decisões [19].

Relação de todas as alternativas possíveis

A decisão envolve uma escolha entre as alternativas de ação. Deve-se considerar todas as ações possíveis que podem ser executadas e que possam ser avaliadas isoladamente. O conjunto de alternativas também é conhecido como conjunto de escolhas ou conjunto de possibilidades. A identificação das alternativas levará em conta opções possíveis e não utópicas. As alternativas devem expressar opções reais e comparáveis entre si. É necessário listar todos os eventos que podem ocorrer como resultado das possíveis decisões tomadas. As alternativas ou ações formam um conjunto de “caminhos” possíveis de serem seguidos, os quais são necessariamente excludentes. Quando conseguimos listar razoavelmente todas as possibilidades temos uma lista exaustiva, difícil chegarmos a essa lista de modo completo, uma vez que o decisor pode eventualmente desconhecer algumas alternativas.

Como exemplo de uma lista de alternativas, podemos considerar a enfermidade de um decisor. Se o agente decisório sofre de dor de cabeça, entrarão nessa lista de alternativas os remédios disponíveis nas drogarias que atendem à essa doença. Pode parecer trivial, porém a escolha pelo melhor medicamento pode passar pelos seguintes critérios: o medicamento será em comprimido, gotas ou pomada; se há preferência por algum laboratório, marca, genérico ou similar e outros critérios específicos da situação.

Boas Decisões

Deve ficar bem claro ao decisor que a sua decisão é de fundamental importância, por este motivo, deve ser pensada com clareza e razão. A racionalidade faz parte do processo, é claro que em muitos problemas, a emoção e o psicológico podem estar envolvidos, porém o decisor deve ter em mente o quão importante é pensar e decidir com a razão. As decisões devem ser logicamente consistentes com as informações disponíveis e as preferências do decisor. É necessário ser coerente durante todo o processo de tomada de decisão.

Acontecimentos ou estado da natureza

Os acontecimentos são estados do ambiente que podem ocorrer fora do controle do decisor. O resultado de cada alternativa de ação, em função dos possíveis acontecimentos, deverá ser conhecido ou avaliado.

Cálculo probabilístico

Um julgamento probabilístico deve ser feito a respeito da ocorrência dos possíveis eventos e as possíveis escolhas. Quando as probabilidades dos acontecimentos não são conhecidas, o agente decisor pode estimar probabilidades de ocorrência dos acontecimentos. Ele deve pautar-se em informações conhecidas sobre os acontecimentos. É importante ser coerente na escolha e tentar obter os melhores estimadores para essas probabilidades.

Valores monetários

Atribuir valores de numerário corrente às preferências. Mesmo em problemas de decisão comuns do dia-a-dia, em que não há uma perda em dinheiro, pode-se atribuir valores monetários fictícios a cada preferência. O decisor fica mais atento quando a decisão envolve uma perda monetária, mesmo que essa seja apenas adotada de modo ilusório e não real. Para os resultados desejáveis deve-se atribuir maior valor monetário e para os indesejáveis um baixo valor.

Unidades de utilidade

Uma medida de mérito. Os equivalentes monetários das várias consequências do problema de decisão devem ser expressos por um conceito que se relaciona de perto com as preferências do decisor em relação ao risco. É uma maneira de quantificar as preferências do decisor feita por meio da ordenação de preferências que são, então, convertidas em valores numéricos.

Equivalente certo

Valor monetário calculado quando o decisor ficar indeciso entre receber o valor na certeza ou manter o problema de decisão que tem em mãos com as incertezas que lhe são características.

Valor da clarividência ou valor da informação perfeita

Representa o limite útil superior do valor de qualquer informação adicional tendente a eliminar a incerteza quando ela ocorrer. Corresponde ao maior valor que devemos pagar para obter uma informação "perfeita" sobre o problema e assim aumentar o nosso "lucro" ou a nossa chance de acerto fazendo a escolha correta.

Diante desses conceitos, o objetivo principal da análise de decisões é aumentar as chances de bons resultados por meio de tomadas de boas decisões, de modo que o decisor fique satisfeito com a escolha feita. Pode-se, então, maximizar as preferências básicas do decisor ou minimizar as perdas.

Para melhor entendimento sobre teoria da decisão, apresentamos o Exemplo 14. Um dos objetivos deste trabalho é aplicar probabilidade subjetiva e teoria da decisão em sala de aula do ensino médio, por isso, propomos um exemplo bem característico a este público.

Exemplo 14. Suponhamos um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio que irá vender *cupcakes* na feira todo sábado para conseguir renda que propicie uma viagem de formatura. Os *cupcakes* serão comprados na sexta-feira que antecede o dia da feira. A doceira da cidade vende seus *cupcakes* no atacado a R$ 2,00 a unidade. Os alunos pretendem vende-los a R$ 4,00 a unidade. Admitindo que a doceira venda seus *cupcakes* em embalagens contendo 50, 100 ou 150 unidades, os alunos poderão escolher entre comprar qualquer uma das 3 opções. Porém, não sabem de antemão qual será a demanda a cada sábado. Os alunos estimam em 0,35, 0,45 e 0,20, respectivamente, a probabilidade de que a demanda seja de 50, 100 ou 150 unidades. Os alunos sabem que os *cupcakes* comprados deverão ser vendidos todos no sábado, os *cupcakes* não vendidos serão considerados como perda, já que a validade desses *cupcakes* é de apenas 4 dias. Sendo assim, eles não poderão vendê-los na semana seguinte e o único lugar em que poderão vender esses *cupcakes* é na feira aos sábados.

a)Dentro dessa situação devemos escolher a melhor decisão a ser tomada.

Obs: No exemplo tomado estamos admitindo que a venda dos cupcakes seja feita apenas nas quantias de 50, 100 ou 150 unidades para facilitar a compreensão, já que o propósito deste trabalho é apresentar probabilidade subjetiva e teoria da decisão para alunos do ensino médio. Nosso problema pode ficar bem mais extenso e complexo caso não seja estipulada a quantia vendida a cada sábado.

5.4) AS AÇÕES NA TOMADA DE DECISÃO

Todas as vezes que nos deparamos em ocasiões nas quais temos mais de uma opção de escolha devemos tomar uma decisão e tentar escolher a opção que mais nos satisfaça. Nem sempre decidir entre as opções oferecidas é um processo fácil. É importante, diante de situações como esta que tenhamos em mente todas as possíveis ações.

Listar todas as alternativas razoáveis de ações ajuda-nos a tentar fazer a melhor escolha. É necessário reconhecer que não podemos tomar várias decisões a respeito de um mesmo assunto e encontrar nessa lista de ações apenas uma decisão a ser escolhida. Quanto mais informações tivermos a respeito da ação, mais fácil será a escolha. Porém, em situações de incerteza, nem sempre é possível afirmar que a decisão tomada é a mais correta. As incertezas também devem ser estudadas em conjunto com as decisões. Os eventos incertos não são irrelevantes. Para cada situação devemos considerá-los, mas em muitos problemas não conseguiremos listar todas as incertezas. Ao listar as possíveis ações e as incertezas também levamos em conta a subjetividade. Duas pessoas nem sempre possuirão a mesma lista de ações diante de uma mesma situação. Um evento relevante para uma pessoa nem sempre será para outra. A experiência de cada um faz parte do processo. Uma mesma pessoa ao enfrentar um processo decisório e futuramente se deparar com algo parecido, devido à experiência já vivida ao tomar a decisão no passado, pode elaborar uma lista de ação diferente da que realizou há tempos atrás. A experiência é importante ao decidir, muitas ações consideradas importantes no passado podem já não ter mais significado no presente. Uma escolha que deu certo no passado sempre será considerada positiva no presente, uma decisão que trouxe perda ou prejuízo nem sempre será escolhida novamente.

Ao decidir, podemos considerar uma lista de decisões e uma lista de eventos incertos, com o maior número possível de informações sobre eles. Analisar a consequência de cada decisão em cada um dos eventos incertos e buscar fazer a melhor escolha, tendo em mente que a melhor escolha de hoje nem sempre será a de amanhã. Fatores como a maturidade e a experiência fazem parte de nossa vida e influenciam no processo de decisão.

No Exemplo 12 os alunos devem listar as três situações:

Comprar 50 unidades de *cupcakes*;

Comprar 100 unidades de *cupcakes*;

Comprar 150 unidades de *cupcakes*.

5.5) A INCERTEZA NO PROCESSO DECISÓRIO

Os maiores filósofos e pensadores reconheceram que o comportamento humano é pautado pela incerteza e pelo conhecimento limitado do mundo. Ainda que por vezes, a certeza possa ser uma noção conveniente, não há nada que possamos fazer sem estar à deriva do acaso. A certeza não passa de uma miragem fabricada à frente de nossos olhos por um universo incerto.

A tomada de decisão pode surgir, muitas vezes, em situações nas quais a incerteza desempenha um papel crucial. Quando fazemos uma previsão não estamos adivinhando com exatidão e certeza o que vai acontecer. Da incerteza surge a necessidade de estudar formalmente o processo decisório e descrever claramente as ações, as atitudes e suas consequências. Ao enfrentar a incerteza fazer uma previsão consiste em ter uma propensão mais ou menos forte e esperar que certas alternativas sejam verdadeiras antes que outras.

Muitos adotam incerteza como sinônimo de risco, ambiguidade, confusão, dúvida, hesitação, e até mesmo ansiedade.

Prever as alternativas que podem ocorrer, de forma espontânea, e que não nos deixarão em casos desfavoráveis faz parte do processo de escolha. Ao decidir devemos examinar os prós e os contras para depois expressar nossa previsão. Devemos ter consciência e reconhecer que o que é incerto é incerto e não pretendemos transformar a incerteza em certeza, mas decidir racionalmente e da melhor forma possível.

Esse processo nos leva a estabelecer critérios para medir as possibilidades ao decidir e calcular probabilidades. Precisamos ter cuidado ao estabelecer valores de modo que, os mesmos, não tragam efeitos indesejáveis como uma perda. O grau de probabilidade atribuído por um indivíduo a um possível evento, se manifesta pelas condições em que ele estaria disposto a apostar por esse evento.

Bruno De Finetti em seu trabalho publicado em 1937, "La prévision: sés bis logiques, sés sources subjectives" concebe a probabilidade como uma noção prática aplicável à vida cotidiana. Segundo o autor, é possível supor um evento bem definido mesmo que este deixe dúvidas sobre sua ocorrência ou não. A incerteza sobre a sua ocorrência obriga o decisor a definir dois termos: a comparação e a graduação da incerteza desses eventos [28]. De Finetti estabelece alguns postulados para a relação comparativa "mais provável que". Esses postulados são:

1.Um evento incerto pode ter a mesma probabilidade, ser mais provável ou menos provável que outro.

2.Um evento incerto sempre será mais provável que um evento impossível e menos provável que o evento certo.

3.Se um evento A' possui maior probabilidade que outro evento A e, este último é mais provável que outro evento A", então A' será mais provável que A" (propriedade transitiva).

A noção da incerteza faz com que sejamos cautelosos ao tomar uma decisão. Podemos diminuir o grau de incerteza a partir do momento em que obtemos mais informações sobre o problema.

Para o problema dos *cupcakes* os alunos não possuem certeza sobre a quantidade de *cupcakes* que deverão comprar, pois não é certo que estes *cupcakes* serão vendidos. Os alunos apenas estimam as probabilidades de venda que são de 0,35 para 50 unidades, 0,45 para 100 unidades e 0,20 para 150 unidades. Sem maior conhecimento sobre a teoria da decisão, baseados somente na cautela, os alunos poderiam escolher a menor quantidade para o primeiro dia de vendas. Observando o que acontecerá nesse dia, conversando com feirantes já experientes, colhendo mais informações, os alunos poderão decidir, de forma mais precisa, a venda para os próximos dias de feira. Porém, alguns conceitos da teoria da decisão nos ajudarão a resolver o problema de maneira mais precisa.

5.5.1) COMO MEDIR NUMERICAMENTE A INCERTEZA

Diante da incerteza sempre fazemos suposições do que pode vir a acontecer: o tempo está nublado, deve chover; o desfile de carnaval de nossa escola de samba será um sucesso, as roupas e carros alegóricos estão ficando muito bonitas; o investimento na bolsa de valores pode ter um bom retorno financeiro; meu candidato a prefeito tem grandes chances de ganhar a eleição nesse ano. São muitos os eventos incertos aos quais nos deparamos cotidianamente. Muitas vezes, não temos certeza se estes ocorrerão ou não, ou sairão do jeito que imaginamos, mas sabemos que alguns eventos são mais prováveis de acontecer do que outros.

É mais fácil adivinhar a face obtida no lançamento de um dado balanceado do que ganharmos na mega-sena, ou até mesmo ganharmos R$ 1,00 no jogo da raspadinha.[7] Para quantificar a incerteza devemos atribuir valores mais altos aos eventos mais prováveis e valores menores aos eventos menos prováveis. Afinal, mesmo diante da incerteza, o objetivo do decisor é sempre fazer a melhor escolha.

A medição em número é um processo que ajuda a analisarmos as ações para termos mais acertos em decisões que envolvem a incerteza.

Na probabilidade subjetiva o valor atribuído aos eventos pode variar de um indivíduo para outro, já que cada um é único e possui uma relação diferente com o mundo que o cerca, com opiniões e pensamentos próprios. Para a teoria objetivista, as probabilidades deveriam ser as mesmas diante de um mesmo evento com as mesmas informações. Sabemos que, diante da subjetividade muitos são os fatores que influenciam na decisão, como as experiências de cada indivíduo, a maturidade, o medo de arriscar que muitas pessoas têm diante de situações de risco. Assim, se um esperto decisor valoriza a probabilidade de ocorrência de um evento em 0,9 e uma pessoa comum valoriza em 0,2 e o evento realmente ocorre, mesmo que aparentemente a valorização do decisor experiente foi melhor, no entanto, as valorizações são igualmente boas se correspondem aos respectivos julgamentos que cada um possui a respeito do evento.

[7] Jogo mencionado na atividade 6.3 deste trabalho : Sorte ou Azar?

Cada pessoa diante de um evento A e de uma informação I pode atribuir o seu valor ao evento em questão. No entanto, mesmo que os valores atribuídos por cada um seja diferente, deve-se sempre haver coerência na tomada de decisão. Pessoas coerentes tem mais chance de tomar a decisão correta. Todo indivíduo deve sempre rever sua atribuição de valores de modo a evitar a incoerência. A atribuição de valores está diretamente relacionada à informação que o decisor possui a respeito do evento em questão. O problema encontra-se quando um mesmo sujeito atribui valores muito diferentes para uma mesma informação diante de novas informações. Por isso, há necessidade de ser coerente ao atribuir valores.

Por exemplo, um certo indivíduo tem as seguintes preferências, prefere uma determinada casa de campo a um automóvel; prefere o automóvel a um apartamento; mas prefere o apartamento à casa de campo. Há algo de estranho com as preferências do indivíduo neste exemplo. Se associarmos o termo "prefere" ao valor que o indivíduo está disposto a pagar para trocar um bem pelo outro, neste caso, este estaria ficando mais pobre. Supondo que este tenha a casa e paga para trocá-la pelo apartamento, então paga novamente para trocar o apartamento pelo automóvel e finalmente paga para trocar o apartamento pela casa. Ao fim, continua com a casa e perdeu dinheiro. O exemplo contradiz o postulado 3 de De Finetti, propriedade transitiva. Percebemos que não há coerência no exemplo.

O decisor ideal é a pessoa racional, coerente, atento às regras e aos valores atribuídos aos eventos incertos. Nos casos econômicos onde as apostas são pagas em dinheiro, o decisor sempre fica atento e procura ser o mais coerente possível, pois qualquer falha ou transgressão ocorre em perda ou prejuízo financeiro. Porém, medir numericamente a incerteza é um processo que pode estender-se a todas as decisões, mesmo que o prêmio seja fictício. Podemos comparar qualquer valor atribuído a um evento como um número de bilhete de loteria, de tal modo, que o indivíduo coerente respeite suas preferências e as decisões sejam pertinentes com a máxima utilidade esperada.

5.5.2) INCERTEZA, RISCO E AMBIGUIDADE

Apesar de muitas pessoas considerarem incerteza como sinônimo de risco, ambiguidade, hesitação, etc, devemos entender a diferença entre incerteza, risco e ambiguidade ao tomar uma decisão. Considera-se risco a situação ao qual o tomador de decisão pode usar apenas uma probabilidade (objetivamente) para cada um dos resultados possíveis. A situação de incerteza corresponde ao caso em que as probabilidades não são objetivamente definidas, isto é, o indivíduo atribui uma probabilidade subjetiva de que ocorra determinado evento. A ambiguidade ocorre num contexto de incerteza quando o tomador de decisão não é capaz de especificar uma probabilidade sobre os eventos, mas sim um conjunto destas. Para ilustrar a diferença entre esses termos tomemos como exemplo.

Uma urna contém 100 bolas, idênticas no formato e textura, diferem-se apenas pela cor, há bolas pretas e brancas. Uma bola será retirada, aleatoriamente, dessa urna e verificará sua cor. O decisor deverá escolher entre apostar na cor branca ou apostar na cor preta. Se ele possui a informação que nessa urna há 30 bolas brancas e 70 bolas pretas, a situação é de risco caso ele apostar na cor branca, já que a chance de ocorrência dessa cor é de apenas 30% contra 70% da cor preta. Será de incerteza se ele não sabe a proporção de bolas na urna, mas atribui uma probabilidade específica para se retirar uma bola branca (0,5 por exemplo). Será de ambiguidade, se ele admitir como possíveis várias probabilidades para a retirada de uma bola branca (por exemplo, entre 0,2 e 0,8) .

5.6) MATRIZ DE DECISÃO

A matriz de decisão é uma ferramenta usada pelo agente decisor para dispor a informação necessária de modo que a melhor decisão possa ser tomada. As informações contidas numa matriz de decisão são as seguintes:

- as alternativas (ações) disponíveis ao agente decisor;
- os acontecimentos (estados da natureza) que podem ocorrer afetando a qualidade de escolha;
- as probabilidades dos vários acontecimentos;
- as consequências resultantes das várias combinações das alternativas com os acontecimentos;
- as utilidades, isto é, os níveis de satisfação de cada consequência.

Uma matriz de decisão é definida do seguinte modo:

- **Certeza**: o decisor tem toda a informação necessária à construção da matriz de decisão e sabe quais os acontecimentos que podem ocorrer.

- **Risco:** o decisor tem toda a informação necessária à construção da matriz de decisão. Embora o acontecimento que irá ocorrer não esteja determinado, são conhecidas as probabilidades de ocorrência dos vários acontecimentos.

- **Incerteza:** o decisor não tem toda a informação necessária à construção da matriz de decisão. Desconhece-se qual o acontecimento que poderá ocorrer, assim como as várias probabilidades de ocorrência.

- **Conflito:** o decisor não tem toda a informação necessária à construção da matriz de decisão. Os acontecimentos são ações de um competidor e as probabilidades são desconhecidas.

Vejamos a matriz de decisão para o problema dos *cupcakes*. Sabemos que os alunos ganham R$ 2,00 na venda de cada *cupcake* (R$ 4,00 – R$ 2,00) e perdem R$ 2,00 a cada *cupcake* não vendido. A matriz de decisão para o problema é dada na Tabela 2.

Tabela 2 - Matriz de decisão para o problema dos *cupcakes*.

	ESTADOS DA NATUREZA		
ALTERNATIVAS	Vender 50 *cupcakes* p=0,35	Vender 100 *cupcakes* p= 0,45	Vender 150 *cupcakes* p= 0,20
Comprar 50 *cupcakes*	R$ 100,00	RS 100,00	R$ 100,00
Comprar 100 *cupcakes*	0	R$ 200,00	R$ 200,00
Comprar 150 *cupcakes*	- R$ 100,00	R$ 100,00	R$ 300,00

Analisando a matriz de decisão representada na Tabela 2, sabemos que:
- caso eles comprem 50 *cupcakes* e consigam vender todos o lucro será de R$ 100,00 (50 x R$ 2,00). É uma medida bastante conservadora, mesmo que a demanda seja maior do que 50 unidades, eles não terão mais *cupcakes* para vender e irão embora com R$ 100,00 de lucro;

- ao comprar 100 *cupcakes*, eles poderão ir embora sem nada ou ganhar R$ 200,00. Caso vendam apenas 50 *cupcakes*, ganharão R$ 100,00 pela venda, mas também perderão R$ 100,00 dos 50 *cupcakes* não vendidos e irão embora sem prejuízo, mas não terão lucro. Assim, ficará difícil realizar a tão sonhada viagem de formatura. Caso consigam vender os 100 *cupcakes* irão embora felizes com um lucro de R$ 200,00;

- a escolha pela compra de 150 *cupcakes* é mais audaciosa. Essa opção apresenta lucro maior, mas poderá dar prejuízo se venderem apenas 50 *cupcakes*. Ganharão R$ 100,00 pela venda dos 50 *cupcakes* e perderão R$ 200,00 por não conseguirem vender as outras 100 unidades, resultando em R$ 100,00 de prejuízo, o que pode ser muito ruim para eles. Poderão lucrar R$ 100,00 na venda de 100 *cupcakes*, o que torna essa alternativa com o mesmo lucro da alternativa 1, compra de 50 *cupcakes*. Mas também poderão ganhar R$ 300,00 caso a feira esteja bastante movimentada e eles consigam vender os 150 *cupcakes.*

5.7) CRITÉRIOS ADOTADOS NA DECISÃO TOMADA SOBRE INCERTEZA

Na decisão sob incerteza, não são conhecidas as probabilidades de ocorrência dos estados da natureza. Existem diversos critérios disponíveis para a tomada de decisão. Não há critério único para os problemas de decisão tomados sob incerteza. Apresenta-se a seguir alguns dos critérios mais conhecidos. Detalharemos o problema dos cupcakes para cada um dos critérios, consideraremos que os alunos não possuem a informação da probabilidade de venda de cada uma das quantidades.

CRITÉRIO *MAXIMIN*

A característica desse critério é ser bastante conservador. A palavra *maximin* quer dizer o máximo entre os mínimos. Para cada alternativa entre si, escolhemos aquela que conduz ao "menos ruim" dos piores. É preciso, porém, tomar um certo cuidado, pois o que é "máximo" ou "mínimo" depende de como foi construída a matriz de decisão. Alguns decisores consideram o critério *maximim* pessimista.

Podemos construir uma tabela de decisão, Tabela 3, para o problema *dos cupcakes* com os piores resultados.

Tabela 3 - Matriz de decisão usando o critério *maximin.*

ALTERNATIVAS	Vender 50 *cupcakes*	Vender 100 *cupcakes*	Vender 150 *cupcakes*	Piores Resultados
Comprar 50 *cupcakes*	R$ 100,00	R$ 100,00	R$ 100,00	**R$ 100,00**
Comprar 100 *cupcakes*	0	R$ 200,00	R$ 200,00	0
Comprar 150 *cupcakes*	-R$ 100,00	R$ 100,00	R$ 300,00	-R$100,00

Se os alunos são pessimistas, usarão o critério, escolhendo o máximo entre os mínimos. A opção escolhida por eles seria a de comprar 50 *cupcakes* e obter um lucro de R$ 100,00 a cada sábado. Considerando que trabalhariam mais ou menos 30 sábados até o dia da viagem, lucrariam um total de R$ 3.000,00. Não seria suficiente para pagar a viagem para todos os alunos. Supondo 20 alunos e cada viagem a R$ 500,00 precisariam de R$ 10 000,00 para pagar a viagem toda. Seria uma ajuda, mas não o suficiente.

CRITÉRIO *MAXIMAX*

Ao contrário do critério *maximin*, o critério *maximax* é considerado fundamentalmente otimista. Neste critério, identifica-se em cada alternativa o seu melhor resultado. Dados os melhores resultados de cada alternativa, escolhe-se aquele com o melhor entre os melhores. Sendo assim, quando empregado, o decisor encara o futuro totalmente favorável aos seus planos.

Construindo a tabela de decisão, Tabela 4, para o problema dos *cupcakes* com os melhores resultados.

Tabela 4 - Matriz de decisão usando o critério *maximax*.

ALTERNATIVAS	Vender 50 *cupcakes*	Vender 100 *cupcakes*	Vender 150 *cupcakes*	Melhores resultados
Comprar 50 *cupcakes*	R$ 100,00	R$ 100,00	R$ 100,00	R$ 100,00
Comprar 100 *cupcakes*	0	R$ 200,00	R$ 200,00	R$ 200,00
Comprar 150 *cupecakes*	-R$ 100,00	R$ 100,00	R$ 300,00	R$ 300,00

Se a maioria dos alunos for otimista, o critério adotado por eles seria sempre o *maximax*. Obtendo os melhores resultados lucrariam R$ 300,00 a cada final de semana, ao final de 30 sábados daria um lucro de R$ 9.000,00, valor muito próximo da quantia que eles precisam. É necessário ser otimista incorrigível para aceitar esse critério e apostar nessa alternativa.

CRITÉRIO DE LAPLACE

Usa todos os dados da matriz de decisão. Como não são conhecidas as probabilidades dos estados da natureza, estas são supostas iguais, por falta de razão para supô-las diferentes. Por esse motivo, o critério de Laplace é algumas vezes referido como “critério ou método da razão insuficiente”. A probabilidade associada a cada estado da natureza é sempre igual à unidade dividida pelo número de estados da natureza. Após assumir probabilidades iguais, calcula-se o valor esperado para cada alternativa, escolhendo-se a que conduzir ao melhor valor esperado.

Considerando o problema dos *cupcakes*, segundo o critério de Laplace, a probabilidade atribuída a cada estado da natureza pelo critério de Laplace é de $\frac{1}{3}$, tendo em vista que existem 3 estados da natureza. Os valores serão:

Comprar 50 *cupcakes* : $E_1 = 100.\frac{1}{3} + 100 . \frac{1}{3} + 100 . \frac{1}{3} = \frac{300}{3}$ = R$ 100,00.

Comprar 100 *cupcakes* : $\mathbf{E_2 = 0.\frac{1}{3} + 200 . \frac{1}{3} + 200 . \frac{1}{3} = \frac{400}{3} \cong}$ **R$ 133,33.**

Comprar 150 *cupcakes* : $E_3 = -100.\frac{1}{3} + 100 . \frac{1}{3} + 300 . \frac{1}{3} = \frac{300}{3}$ = R$ 100,00.

A melhor alternativa segundo este critério, destacada em negrito, é a com maior valor, ou seja, a alternativa de se comprar 100 *cupcakes*.

CRITÉRIO DE SAVAGE

Este critério é conhecido como critério do remorso *minimax*, que tende a minimizar os maiores remorsos possíveis, para não haver arrependimento. O remorso é calculado com base em quanto é que o agente de decisão se arrependeria, caso uma determinada ação fosse escolhida e um determinado acontecimento ocorresse.

Este critério está baseado no remorso, propõe a minimização do “máximo arrependimento”. O arrependimento ou remorso corresponde à diferença entre o resultado obtido com a ação adotada e aquele que seria obtido se fosse adotada a melhor ação. Para a compra de 50 *cupcakes* com o acontecimento venda de 50 *cupcakes*, não haveria remorso, pois para esse acontecimento ou nos demais (venda de 100 ou de 150 *cupcakes*) sempre o lucro seria igual a R$ 100,00, dado que ele teria apenas 50 *cupcakes* para vender mesmo nas situações de venda de 100 ou 150 *cupcakes*, por ter comprado apenas 50 *cupcakes.* Por outro lado, se ele escolhesse a alternativa 2 comprar 100 *cupcakes* e o acontecimento venda de 50 *cupcakes* ocorresse o remorso seria de R$ 100,00 (100 – 0). Pode-se criar uma matriz de remorsos, subtraindo cada número de uma coluna pelo maior número dessa coluna.

Matriz de remorso para o problema dos *cupcakes*, representada na Tabela 5.

Tabela 5 - Matriz de decisão usando o critério de Savage.

ALTERNATIVAS	Vender 50 *cupcakes*	Vender 100 *cupcakes*	Vender 150 *cupcakes*	Maiores remorsos
Comprar 50 *cupcakes*	0	R$ 100,00	R$ 200,00	R$ 200,00
Comprar 100 *cupcakes*	R$ 100,00	0	R$ 100,00	**R$ 100,00**
Comprar 150 *cupcakes*	R$ 200,00	R$ 100,00	0	R$ 200,00

Os maiores níveis de remorso correspondentes às três alternativas são, respectivamente, R$ 200,00; R$ 100,00 e R$ 200,00. Assim, o nível de remorso *minimax* (mínimo dos máximos) é igual a R$ 100,00, correspondente a compra de 100 *cupcakes* e a venda de 50 *cupcakes* ou 150 *cupcakes*.

CONCLUSÃO.

Dados todos estes critérios e verificando que para cada um destes há uma alternativa diferente a ser seguida, levanta-se naturalmente a questão sobre qual a melhor decisão a ser tomada. Infelizmente, não existe uma solução “correta” para tal questão. Se todos os critérios nos levassem a uma mesma escolha poderíamos fazê-la com total confiança. Pode ser que, em algumas situações um dos critérios seja o mais apropriado. No problema dos *cupcakes,* se os alunos não tiverem muito capital podem optar pelo critério *maximin.*

Contudo, o agente de decisão deve sempre fazer tudo para evitar situações de incerteza. Deve-se tentar obter, mesmo que seja difícil, as estimativas das probabilidades quer que elas sejam objetivas ou subjetivas.

5.8) TEORIA DA UTILIDADE ESPERADA

No problema dos *cupcakes* aplicamos os critérios de decisão*: maximim, maximax,* Laplace e Savage. Percebemos que cada critério adota um método específico de escolha e para cada um deles há uma decisão a ser tomada.

A teoria da utilidade fundamenta-se sobre as preferências reais das pessoas ou entidades quanto aos resultados oriundos de suas decisões e, portanto, abriga em sua essência a explicação do comportamento do decisor. A teoria da utilidade mantém a coerência matemática e produz resultados afins ao comportamento dos seres humanos e de empresas frente ao risco.

A vantagem da teoria da utilidade está em transformar situações onde os prêmios são qualitativos pela substituição desses prêmios por valores de utilidade. Quando as probabilidades dos acontecimentos são conhecidas, o agente decisor pode pesar as utilidades das consequências pelas respectivas probabilidades de ocorrência de modo a obter as utilidades esperadas. A opção com a maior utilidade esperada pode então ser escolhida, essa opção é a que trará maior satisfação.

Quando as probabilidades dos acontecimentos não são conhecidas, o agente decisor pode estimar probabilidades de ocorrência dos acontecimentos. Neste caso, o agente decisor deve pautar-se em informações conhecidas por ele sobre os acontecimentos. É importante ser coerente na escolha e tentar obter os melhores estimadores para essas probabilidades .Quando existem n acontecimentos que podem ocorrer, a utilidade esperada de uma alternativa pode ser calculada da seguinte forma

Utilidade esperada da alternativa i = $\sum_{j=1}^{n}(p_i\, U_{ij})$ **, i = 1,2,3...,n.**

De acordo com as probabilidades atribuídas a cada uma das vendas, podemos obter o valor da utilidade esperada para cada uma das situações, em relação ao problema dos *cupcakes*.

Venda de 50 *cupcakes* : **E_1 = (100)(0,35) + (100)(0,45) + (100)(0,20) = R$ 100,00.**

Venda de 100 *cupcakes*: **E_2 = (0)(0,35) + (200)(0,45) + (200)(0,20) = R$ 130,00.**

Venda de 150 *cupcakes*: **E_3= (-100)(0,35) + (100)(0,45) + (300)(0,20) = R$ 70,00.**

A melhor opção de acordo com o valor máximo esperado, para os alunos é comprar 100 *cupcakes*, o que conduzirá a um lucro médio de R$ 130,00.

5.8.1) AXIOMAS DA TEORIA DA UTILIDADE

Faz-se necessário definir uma função de utilidade para representar coerentemente as preferências do decisor. Para definir essa função é necessário que os axiomas abaixo sejam válidos. O comportamento do agente decisor deve ser compatível com esses axiomas [1].

A notação adotada é:

$A \succ B$ A é preferível em relação a B.

$A \sim B$ A é indiferente em relação a B.

$A \prec B$ B é preferível em relação a A.

1) *Axioma da ordenalidade:* Dados os estados da natureza A e B, estes possuem uma das três relações: $A \succ B$ ou $A \sim B$ ou $A \prec B$.

No problema dos *cupcakes* considerando cada um dos critérios, o axioma da ordenalidade é respeitado. Sejam, A "venda de 50 *cupcakes*", B "venda de 100 *cupcakes*" e C "venda de 150 *cupcakes*".

Critério *maximim*: $A \succ B$ e $B \succ C$.

Critério *maximax*: $C \succ B$ e $B \succ A$.

Critério de Laplace: $B \succ A$ e $B \succ C$; $A \sim C$.

Critério de Savage: $B \succ A$ e $B \succ C$; $A \sim C$.

2)*Axioma da transitividade:* Se $A \succ B$ e $B \succ C$, então $A \succ C$.

Para o problema dos *cupcakes*, o axioma da transitividade:

Critério *maximim:* $A \succ B$ e $B \succ C \Rightarrow A \succ C$.

Critério *maximax:* $C \succ B$ e $B \succ A \Rightarrow C \succ A$.

5.9) EQUIVALENTE CERTO

Chamamos de equivalente certo o valor cujo decisor aceitaria pagar para não participar da situação de incerteza, que pode ser um jogo, uma loteria etc. Cada indivíduo possui um equivalente certo diferente de outro, já que cada um de nós age de modo diferente diante de situações que envolvem riscos. Existem pessoas que possuem aversão ao risco, e por esse motivo, não gostam de apostar e arriscar; outras são indiferentes, ficam neutras diante desta situação e outras tem propensão ao risco e estão sempre apostando.

5.10) CLARIVIDÊNCIA OU INFORMAÇÃO PERFEITA

Suponhamos que diante de um problema de decisão alguém ofereça ao decisor uma informação perfeita de antemão. Podemos até imaginar uma consulta a um adivinho que dirá, por antecipação, qual a melhor decisão a ser tomada em uma situação (se é que podemos encontrar um adivinho que forneça tal informação perfeita e realmente possua o dom da clarividência). Qual seria o valor da consulta a esse adivinho? Quanto devemos pagar a alguém que ofereça essa tal informação perfeita?

Para isso podemos determinar o valor esperado da informação perfeita [1]. Chamando por C a clarividência e por X a variável aleatória valor esperado, o valor esperado da clarividência E(C) é dado por

$$\mathbf{E\,(\,C\,) = E\,(\,X|C) - E\,(X).}$$

O efeito da clarividência é o de se conhecer o estado da natureza antes de se tomar a decisão. Porém, nem sempre é possível obter esse valor na prática. Mas, o valor esperado da informação perfeita pode ser muito útil por representar um limite superior para o valor de qualquer informação adicional.

Admita agora que alguém ofereça aos alunos a informação perfeita de antemão, que pode ser a ajuda de um feirante antigo que já está acostumado com a movimentação da feira e sabe que nos sábados do início do mês as vendas são sempre maiores, portanto, no final do mês a venda pode diminuir. Quanto se deve pagar por essa informação?

Supondo que os alunos sempre venderão a quantia comprada, então sabe-se que quando a demanda for de 50 *cupcakes*, os alunos lucrarão R$ 100,00, quando a demanda for de 100 *cupcakes* o lucro será de R$ 200,00 e quando a demanda for de 150 *cupcakes*, eles lucrarão R$ 300,00:

- os alunos lucrarão R$ 100,00 em 35% das oportunidades;

- lucrarão R$ 200,00 em 45% das oportunidades;

-lucrarão R$ 300,00 em 20% das oportunidades.

Da posse da informação perfeita, o lucro médio dos alunos será

$$(100)(0,35) + (200)(0,45) + (300)(0,20) = R\$\ 185,00$$

Os alunos ganharão agora R$ 185,00 contra R$ 130,00 que ganhavam quando não tinham a informação perfeita. O valor esperado da informação perfeita é

$$E (C) = E (X|C) – E (X)$$

$$E(C) = 185,00 – 130,00 = R\$\ 55,00$$

Os alunos não poderão pagar mais do que R$ 55,00 pela informação perfeita, exatamente o que irão ganhar.

5.11) ÁRVORE DE DECISÃO

Uma árvore de decisão é outra maneira de se dispor a informação necessária à tomada de decisão. A árvore de decisão é um grafo conexo e direcionado. A árvore é composta por ramos de ações e ramos de acontecimentos. Os ramos de ações representam decisões e emanam de nós quadrados, constituem alternativas; os ramos de acontecimentos emanam de nós circulares, são nós de incerteza e representam eventos aleatórios. A cada um destes ramos de acontecimentos está sempre associada uma probabilidade objetiva ou subjetiva e, no fim de cada ramo terminal, encontram-se os valores ou utilidades das respectivas conseqüências.

Na construção da árvore, as probabilidades indicadas são condicionadas aos estados de informação correspondentes a cada nó. Em cada ramificação as probabilidades devem ter soma unitária.

Esta ferramenta apresenta várias vantagens, entre as quais, a de mostrar clara e explicitamente as decisões que deverão ser tomadas, a ordem em que cada decisão eventualmente deverá ser tomada, as consequências de cada decisão e as fontes de incerteza que afetam cada decisão. Graças à computação moderna, empresas grandes conseguem manter árvores de decisão com milhares de nós.

Vejamos como é a árvore de decisão para o problema dos *cupcakes* baseada na Tabela 2 (matriz de decisão para o problema dos *cupcakes*).

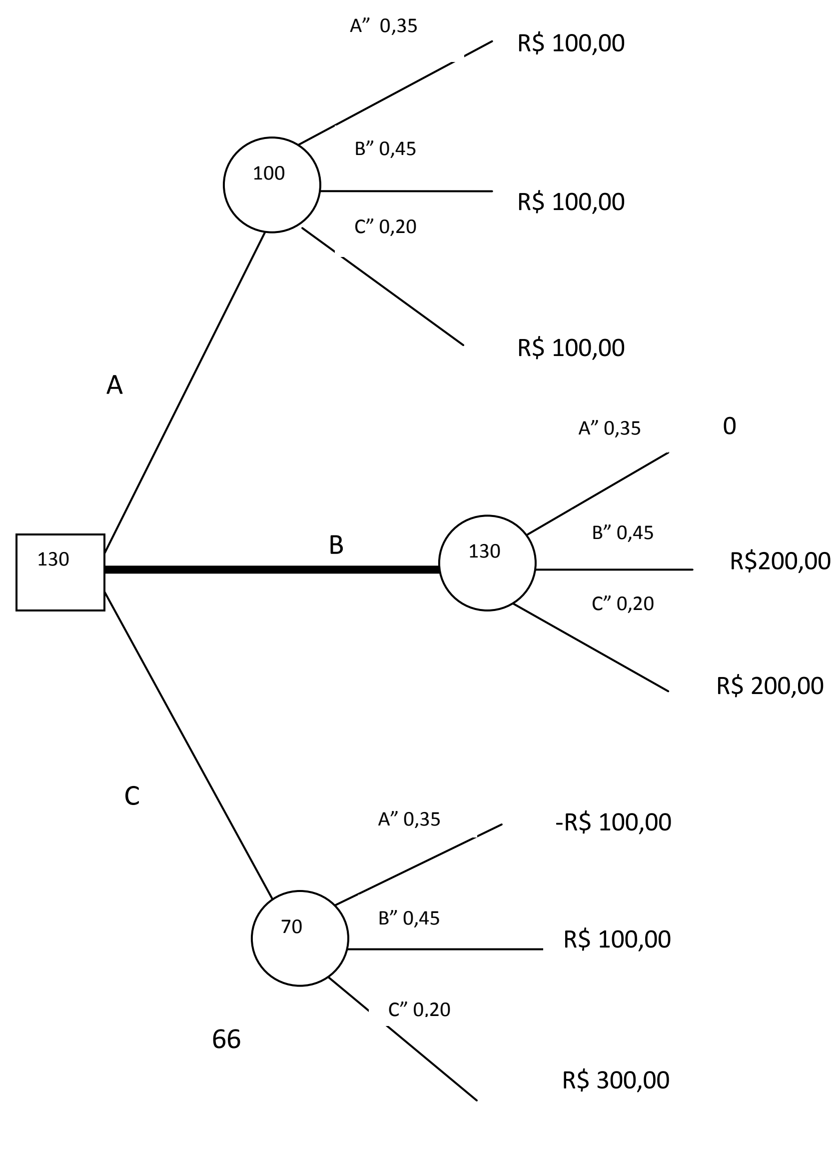
Definimos os eventos, A “compra de 50 *cupcakes*”, B “compra de 100 *cupcakes*” e C “compra de 150 *cupcakes*”.

Conhecemos as probabilidades de demanda para 50, 100 e 150 *cupcakes* dadas por, respectivamente, 0,35 ; 0,45 e 0,20. Consideremos os eventos, A’’ = venda de 50 *cupcakes,* B” = venda de 100 *cupcakes* e C” = venda de 150 *cupcakes.*

Cada um dos círculos da Figura 12 representa a o valor esperado para cada uma das ações, dadas as probabilidades de ocorrência das vendas, calculadas na Seção 5.8. O primeiro círculo representa o valor esperado para a compra de 50 *cupcakes*, o segundo para a compra de 100 *cupcakes* e o terceiro para a compra de 150 *cupcakes*. De cada um destes círculos emanam três ramos indicando as probabilidades de venda de 50 *cupcakes*, 100 *cupcakes* e 150 *cupcakes*. No final de cada um destes ramos, respectivamente, está indicado o lucro obtido com a venda dessa quantidade de cupcakes.

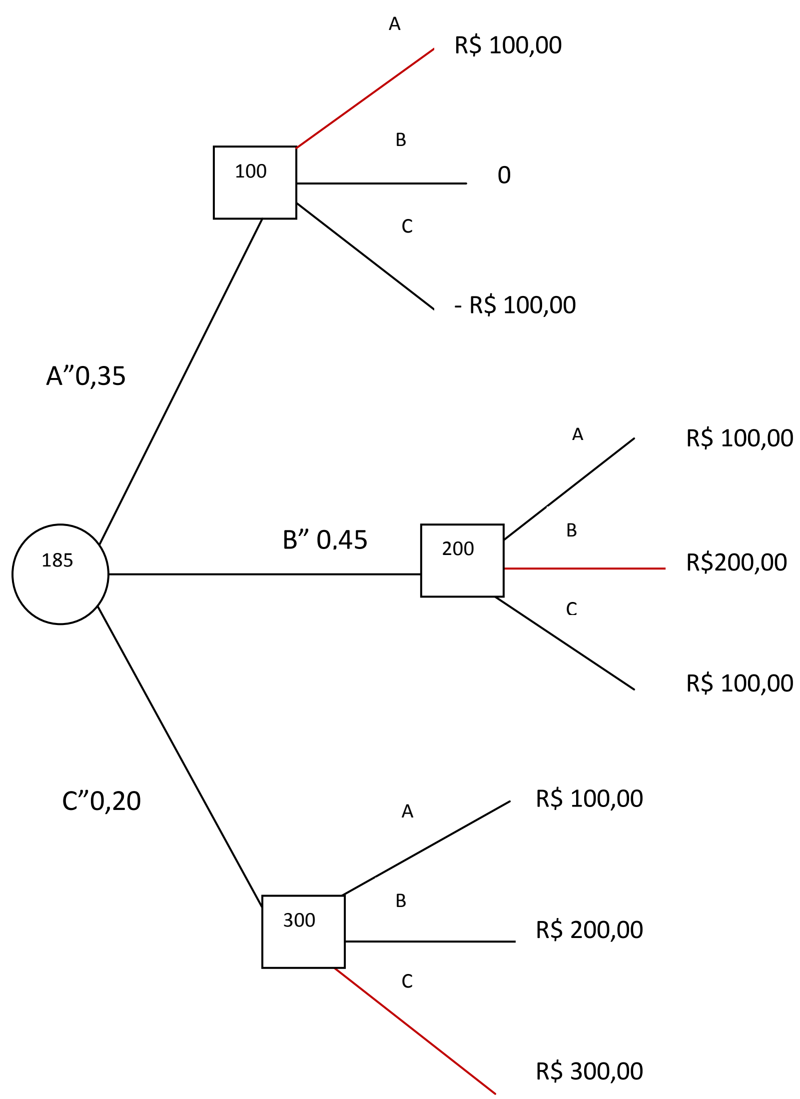
A melhor opção, baseada na maior utilidade esperada é a opção B, compra de 100 *cupcakes*, representada pelo nó quadrado, um nó de decisão.

Figura 12 - Árvore da decisão para o problema dos *cupcakes.*



Usando a clarividência ou informação perfeita, também podemos construir uma árvore de decisão . Na Figura 13 os quadrados são nós de decisão que indicam o maior valor para cada uma das vendas. O primeiro quadrado mostra que o maior valor para a venda de 50 *cupcakes* é dado pela compra de 50 *cupcakes,* o segundo aponta a melhor opção para vender 100 *cupcakes* a compra de de 100 *cupcakes* e no terceiro quadrado a melhor escolha para a venda de 150 *cupcakes* é a compra de 150 *cupcakes.* Sendo assim, se os alunos tiverem uma informação perfeita, o valor esperado é R$ 185,00, representado pelo círculo. O valor da clarividência é dado por $E(C) = E(X \mid C) - E(X) = 185{,}00 - 130{,}00 = 55{,}00$. O valor da informação perfeita é igual a R$ 55,00.

Figura 13 - Árvore da decisão usando clarividência.



CAPÍTULO 6

ATIVIDADES ENVOLVENDO PROBABILIDADES E TEORIA DA DECISÃO PARA A SALA DE AULA

Neste capítulo queremos oferecer ao professor uma maneira diferente de ensinar probabilidade e a oportunidade de introduzir no ensino médio conceitos relacionados à teoria da decisão. Observando a necessidade de adequação a alunos com diferentes motivações, interesses e capacidade, os jogos são uma oportunidade para se ensinar Matemática de forma criativa e dinâmica. O jogo cria situações que exigem soluções originais, desenvolve habilidades de raciocínio lógico que estão envolvidas no processo de jogar como investigação, levantamento e checagem de hipóteses.

As atividades propostas neste trabalho desenvolvem cuidadosamente a compreensão da linguagem de probabilidade e suas diferentes interpretações, faz a relação com a estatística ao trabalhar médias e desvio padrão e amplia o currículo comum do ensino médio ao inserir teoria da decisão.

6.1) ROLE OS DADOS

Esta atividade é sugerida em [37]. Foi feita uma adaptação do jogo para ser trabalhado em sala de aula.

O interessante é a aplicação do jogo logo após ser introduzido o conceito de probabilidade. Ao jogar Role os Dados, os alunos deverão perceber que o jogo não é "justo", ao ponto de dar aos jogadores a mesma chance de ganhar e, juntamente com o professor decidirem o que seria "justo" para esse jogo.

- **Número de participantes:** no mínimo 2.
- **Material necessário:** 2 dados para cada dupla.
- **Objetivo:** Relacionar probabilidade clássica e frequentista através de atividade lúdica, visando proporcionar ao aluno maior envolvimento e interesse pelo conteúdo.
- **Duração:** 2 a 3 aulas.
- **Regras:**

1) Os jogadores deverão realizar 10 partidas ou rodadas.

2) A cada rodada, os dois jogadores lançam, ao mesmo tempo, cada um o seu dado e anotam o resultado na tabela (apresentada no desenvolvimento). O jogador A anota o seu resultado e depois o jogador B, na forma de par ordenado (A,B).

3) O jogador A marca 1 ponto se o valor da diferença, em módulo,entre os números que saírem nos dados for 0, 1 ou 2. O jogador B marca 1 ponto se o valor da diferença, em módulo, for 3, 4 ou 5. Exemplo: se os números obtidos nos dados são: 4 e 6, temos $|4-6| = 2$, quem marca ponto é o jogador A.

4) Após as 10 rodadas, vence o jogador com o maior número de pontos.

Após passadas as regras, cada dupla decidirá quem será o jogador A e quem será o jogador B. O professor não deve intervir, apenas analisar qual o critério de escolha adotado por cada dupla.

- **Desenvolvimento**

Cada dupla receberá a seguinte tabela, Tabela 6, para anotar os resultados[8]. Se achar melhor, o professor pode passar a tabela na lousa e pedir para que um dos alunos da dupla copie no caderno ou numa folha.

Tabela 6 - Material de apoio para o jogo Role os Dados.

RESULTADO (A,B)	DIFERENÇA $\|A-B\|$	GANHADOR

[8] Encontra-se no apêndice um modelo da tabela para facilitar o trabalho do professor.

VENCEDOR	xxxxxxxxxxxxxx	

Após as 10 rodadas, declara-se o ganhador. O professor deve anotar na lousa quem foi o vencedor de cada dupla, jogador A ou jogador B. A questão fundamental a ser explorada é: as regras do jogo são justas, no sentido de dar a ambos os jogadores probabilidades iguais de ganhar? Caso não seja, o que poderíamos fazer para torná-las justas?

Deixar os alunos pensarem um pouco sobre a questão. A resposta é que as regras **não** são justas. Por que não?

Vejamos os resultados para todos os lançamentos através da tabela. É interessante os próprios alunos construírem a tabela abaixo, Tabela 7.

Tabela 7 - Resultados possíveis para o jogo Role os Dados.

Resultado	Diferença em Módulo	Ganhador	Resultado	Diferença em Módulo	Ganhador
(1,1)	0	A	(4,1)	3	B
(1,2)	1	A	(4,2)	2	A
(1,3)	2	A	(4,3)	1	A
(1,4)	3	B	(4,4)	0	A
(1,5)	4	B	(4,5)	1	A
(1,6)	5	B	(4,6)	2	A
(2,1)	1	A	(5,1)	4	B
(2,2)	0	A	(5,2)	3	B
(2,3)	1	A	(5,3)	2	A
(2,4)	2	A	(5,4)	1	A
(2,5)	3	B	(5,5)	0	A
(2,6)	4	B	(5,6)	1	A
(3,1)	2	A	(6,1)	5	B
(3,2)	1	A	(6,2)	4	B
(3,3)	0	A	(6,3)	3	B
(3,4)	1	A	(6,4)	2	A
(3,5)	2	A	(6,5)	1	A
(3,6)	3	B	(6,6)	0	A

Há 24 chances das 36 do jogador A ganhar 1 ponto contra 12 chances em 36 do jogador B . Ou seja, 66,67% aproximadamente do jogador A ganhar o jogo contra 33,33% do jogador B. O jogador A tem o dobro de chances de ganhar em relação ao jogador B. Pode-se analisar o resultado obtido na sala de aula e verificar que, provavelmente o jogador A, na maioria das vezes foi campeão. Pode até ser que haja mais ganhadores B, mas isso é pouco provável de acordo com a probabilidade frequentista.

Como tornar este jogo justo?

Analisando as diferenças.

DIFERENÇA 0 = 6 resultados : │1-1│, │2-2│, │3-3│, │4-4│, │5-5│, │6-6│.

DIFERENÇA 1 = 10 resultados : │1-2│, │2-1│, │2-3│, │3-2│, │3-4│, │4-3│, │4-5│, │5-4│, │5-6│, │6-5│.

DIFERENÇA 2 = 8 resultados: │1-3│, │2-4│, │3,1│, │3-5│, │4,2│, │4-6│, │5-3│, │6-4│.

DIFERENÇA 3 = 6 resultados: │1-4│, │2-5│, │3-6│, │4-1│, │5-2│, │6-3│.

DIFERENÇA 4 = 4 resultados: │1-5│, │2-6│, │5-1│, │6-2│.

DIFERENÇA 5 = 2 resultados: │1-6│, │6-1│.

Para o jogo tornar-se justo, devemos ter 18 resultados possíveis para cada jogador. Algumas das alternativas possíveis são:

Jogador A ganha sempre que a diferença, em módulo, for igual a 1 e 2 e o jogador B ganha para as demais diferenças 0, 3, 4, e 5.

Jogador A ganha para as diferenças 2, 3, e 4, enquanto jogador B ganha para as diferenças 0, 1 e 5.

Cada dupla deve chegar a estes resultados ou a outros que são possíveis através do incentivo e da ajuda do professor. O professor será apenas orientador durante a atividade, direcionando os alunos a concluírem por si só quais os resultados justos para o jogo.

- **Conclusão e interdisciplinaridade.**

Para fazer a ligação da matemática com outras áreas do conhecimento, diretamente com a Física, a reportagem: "País dos Raios" feita pelo programa Fantástico, exibido pela rede Globo de televisão em

17.02.2013 é bastante interessante. O repórter compara a probabilidade de uma pessoa ser atingida por raios com o lançamento de um dado.

O professor de Física poderá ser convidado a conhecer a atividade e aproveitar o tema para ser estudado em suas aulas. O vídeo tem duração de 12:30 minutos, deve ser assistido pela classe logo após a atividade Role os Dados. O professor poderá usar uma ou duas aulas para realizar o jogo e tirar as conclusões e a outra aula para passar o vídeo e calcular as probabilidades citadas pela reportagem.

O apresentador comenta que a probabilidade de uma pessoa ser atingida por um raio no Brasil, em média, equivale a alguém jogar um dado por oito vezes seguidas e obter o mesmo resultado. Considerando que o número com a face voltada para cima, em um dado honesto deve ser escolhido antes do primeiro lançamento, a reportagem sugeriu o número 2. Porém, na região Amazônica, devido ao calor e a grande umidade do ar, a probabilidade equivale a jogar o dado três vezes e tirar o mesmo resultado e segundo o repórter, uma sequência de três números 2.

O professor deve juntamente com a sala calcular estas probabilidades. Os alunos poderão lançar o dado por três vezes consecutivas e tentar descobrir se alguém consegue obter uma sequência de números 2.

Considerando o espaço amostral Ω "lançamento de um dado balanceado por oito vezes consecutivas" e o evento A "obter uma sequência de oito números dois, sendo o número escolhido antes do primeiro lançamento", a probabilidade de ocorrência do evento A de acordo com a reportagem equivale à probabilidade de uma pessoa ser atingida por um raio no Brasil, sendo representada por P(A) $= \frac{1}{6^8} = \frac{1}{1.679.616} = 0{,}0000595\%$.

Considerando um novo espaço amostral ϖ "lançamento de um dado balanceado por três vezes consecutivas" e o evento B "obter uma sequência de três números dois, sendo o número escolhido antes do primeiro lançamento", a probabilidade de ocorrência do evento B equivale à probabilidade de uma pessoa ser atingida por raio na Região Amazônica, logo P(B) $= \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} = 0{,}463\%$.

Algum aluno, mais interessado e atento, pode questionar de onde o repórter tira essa comparação com os dados. É informado na reportagem, que por ano, cerca de 130 pessoas morrem atingidas por raios. Em 2013, segundo o IBGE a população brasileira era de aproximadamente 198.360.943 habitantes. Logo, temos uma probabilidade de P $= \frac{130}{198.360.943} = 0{,}0000655\%$ de uma pessoa morrer atingida por um raio. Sendo assim, os dados foram usados para fazer uma comparação, pois os resultados são bem próximos, com erro de cerca de 0,0000655-0,0000595= 0,000006%.

OBS: O cálculo de probabilidades de uma pessoa ser atingida por raio foi feito baseado em uma média geral para o Brasil e em específico para a região Amazônica. Se achar interessante, o professor pode realizar o cálculo para cada uma das regiões brasileiras ou acrescentar a região dos alunos como fonte de pesquisa.

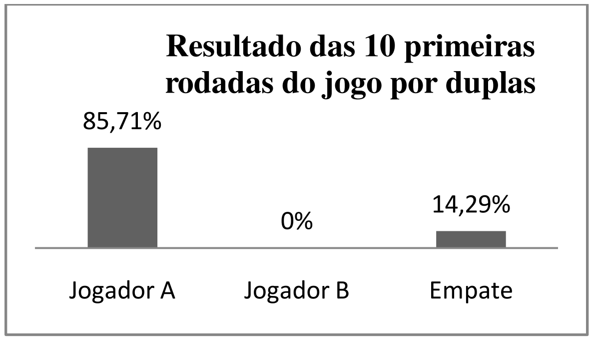
- **Análise das informações.**

A atividade Role os Dados foi aplicada em uma turma de 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual João Ribeiro de Carvalho de Conceição dos Ouros, Minas gerais, logo após a introdução do conceito de probabilidade. Foram introduzidas as definições de espaço amostral, eventos e alguns exemplos de exercícios de probabilidade como, bolinhas enumeradas e retiradas de uma urna, lançamento de um dado comum e observação da face voltada para cima, sorteio de prêmios na sala de aula. Ainda não havia sido mencionado o espaço amostral para o lançamento de dois dados distintos. O objetivo de não fazer referência a este tipo de problema foi deixar a abordagem para ser aplicada no decorrer do jogo.

A sala foi dividida em 14 duplas. Cada dupla recebeu os dados e as regras do jogo foram estabelecidas. O jogo iniciava com a escolha do jogador, A ou B. Como o jogador A ganha se a diferença for 0, 1 ou 2 e o jogador B ganha com diferença 3, 4 e 5, para os alunos havia 50% de chances para cada jogador. Sendo assim, a escolha pelo jogador A ou B foi feita de modo aleatório. Algumas duplas tiraram par ou ímpar para decidir quem seria o jogador A ou B, a vitória dava direito à escolha. Nenhuma dupla percebeu que o jogo não seria “justo”.

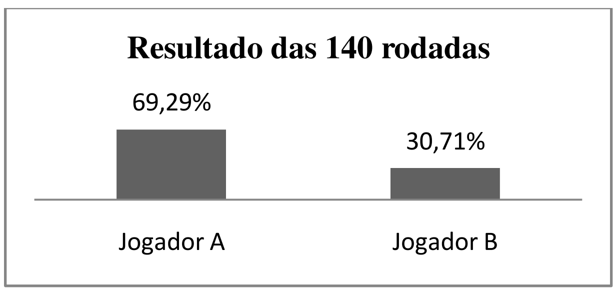
Com o desenrolar da atividade, as duplas foram percebendo que, na maioria das vezes, o jogador A estava ganhando com certa vantagem. Alguns alunos questionaram se o dado ‘tinha algum defeito’. Terminadas as 10 rodadas, fizemos o levantamento. Havia 12 duplas nas quais o vencedor foi o jogador A e duas duplas com empate (5 vitórias para cada um). Os alunos acharam o resultado bastante estranho, mas continuaram achando o jogo justo, “o jogador B estava sem sorte ou o dado apresentava algum problema”. O Gráfico 1 apresenta as porcentagens de vitórias de cada um dos jogadores.

Gráfico 1- Porcentagem de vitórias por duplas.



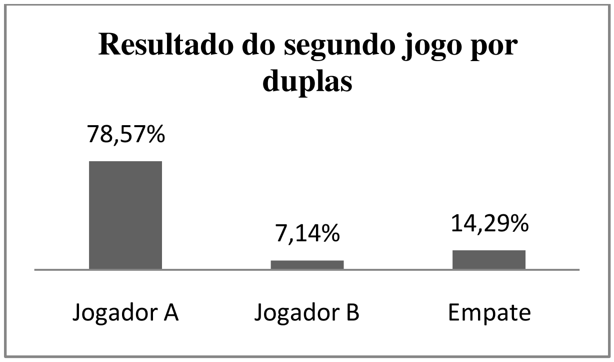
Considerando as 14 duplas jogando 10 rodadas, fizemos a somatória por rodadas. Das 140 rodadas jogadas por todos os alunos, 97 deram vitória a A e 43 deram vitória a B, conforme apresenta o Gráfico 2, em porcentagens.

Gráfico 2 - Porcentagem de vitórias considerando as 140 rodadas.



Sabemos que há 66,67% de chances aproximadamente do resultado ser vitorioso para o jogador A contra 33,33% de chances para a vitória do jogador B. Os resultados apontados no Gráfico 2 estão próximos das porcentagens de vitórias propostas pelo jogo. Não conformados com o resultado, os alunos se dispuseram a jogar novamente. Ninguém queria ser o jogador B. Para evitar confusão foi sugerido que os dados fossem trocados entre as duplas aleatoriamente e houvesse também a troca de jogadores, quem foi o jogador A na primeira rodada seria agora o jogador B. As duplas se mantiveram, trocando apenas o jogador A por B e vice-versa. Mais 10 rodadas foram realizadas e anotados os resultados. O jogador A venceu em 11, o jogador B venceu em 1 dupla e houveram 2 empates, conforme resultado apresentado pelo Gráfico 3.

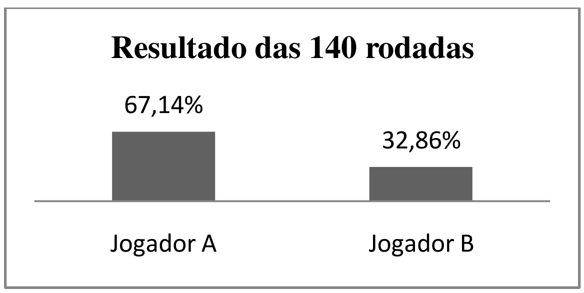
Gráfico 3 - Porcentagem de vitórias do segundo jogo.



.

Considerando as 140 jogadas temos 94 vitórias para A contra 46 vitórias de B, valores próximos do esperado, 66,67% para A e 33,33% para B, apresentados no Gráfico 4.

Gráfico 4 - Porcentagem de vitórias do segundo jogo considerando as 140 rodadas.



.

Ao terminar o segundo jogo os alunos ainda não conformados com a vitória de A começaram a questionar o motivo deste fato ocorrer. Neste momento lançamos a pergunta: esse jogo é justo, a fim de dar as mesmas chances para os dois jogadores de ganhar? Um dos alunos afirmou que sim, já que havia três resultados favoráveis para cada um dos jogadores. Os demais concordaram, porém não entenderam o motivo de A ganhar na maioria das vezes.

Para esclarecer a situação questionamos: quais são os pares ordenados no lançamento dos dois dados para que o resultado da diferença seja zero? Os resultados foram anotados na lousa, (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6).

Quais os pares ordenados para as demais diferenças? Estabeleceu-se um tempo para que anotassem em seus cadernos as diferenças 1, 2, 3, 4 e 5. Após todas as duplas terem terminado suas conclusões, fizemos as anotações na lousa. Nem todas as duplas conseguiram chegar nos 36 resultados possíveis. Algumas não perceberam que apesar do valor da diferença ser igual, os resultados (3,4) e

(4,3), por exemplo, deveriam ser considerados. O par ordenado (3,4) foi obtido com resultado 3 para o jogador A e 4 para o jogador B, já o par ordenado (4,3) foi obtido com resultado 4 para o jogador A e 3 para o jogador B. Anotados todos os resultados, contamos as chances de vitória para o jogador A e para o jogador B , 24 para A contra 12 para B. Transformamos a chance de A e B ganharem em probabilidades. Todos entenderam o motivo da vitória ser, na maioria das vezes, do jogador A e o jogo não ser justo, já que não há 50% de chances de vitórias para cada um.

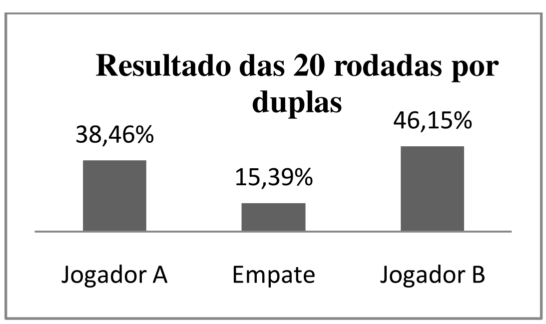
Após a conclusão, introduziu-se o conceito de probabilidade frequentista e citaram-se algumas das experiências realizadas por matemáticos, como no lançamento de moedas. Ficou claro que com apenas 10 lançamentos conseguimos chegar num valor próximo do real, se fizéssemos mais lançamentos (1000, por exemplo) mais perto do resultado real chegaríamos.

Decidimos qual seria o jogo justo e os alunos envolvidos com a atividade sugeriram que o jogo se repetisse com as diferenças que dariam chances iguais de vitória para os dois jogadores. Como o tempo da aula não era suficiente, decidimos que na próxima aula voltaríamos a realizar o jogo novamente, agora com chances iguais de vitória para A e B, 18 chances para cada um.

Na aula seguinte os alunos sentaram-se em duplas, as mesmas da aula anterior (faltaram dois alunos nesse dia, um de cada dupla, os alunos presentes juntaram-se formando uma nova dupla), ficando a sala dividida em 13 duplas. A decisão de quem seria o jogador A ou B foi feita através do lançamento de um dado, quem obtivesse o maior resultado seria o jogador A. O jogo daria vitória a A se a diferença fosse 1 e 2 e vitória a B com diferença 0, 3, 4, e 5.

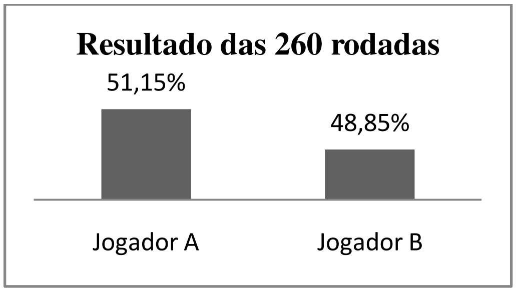
Os alunos preferiram jogar 20 rodadas, ao invés de 10. O resultado obtido considerando as 13 duplas foram, 5 vitórias de A contra 6 vitórias de B e 2 empates, apresentados no Gráfico 5, em porcentagens.

Gráfico 5 - Porcentagem de vitórias do jogo ‘justo’.



Considerando as 260 jogadas, 20 jogadas por dupla, o resultado encontrado foi 133 vitórias para A e 127 vitórias para B. O resultado das 260 rodadas está representado no Gráfico 6.

Gráfico 6 - Porcentagem de vitórias do jogo 'justo' considerando todas as rodadas.



.

Percebemos que os valores apresentados no Gráfico 6 são bem próximos de 50% para cada jogador. A atividade foi enriquecedora, os alunos entenderam probabilidade e tiveram muito interesse durante todo o decorrer do jogo.

- **Complementando a atividade.**

No início do jogo algumas duplas tiraram par ou ímpar para decidir quem seria o jogador A ou B. A vitória no jogo do par ou ímpar dava direito de escolha pelo jogador A ou B. Aproveitando a proposta do jogo Role os Dados e depois de concluirmos a atividade, o seguinte questionamento foi lançado, **' o jogo do par ou ímpar é um jogo justo?'**

Os alunos disseram ter o costume de tirar par ou ímpar nas brincadeiras e, nunca pensaram se as chances de sair par ou ímpar são iguais.

Considerando um jogo onde cada jogador pode mostrar **apenas uma das mãos**, os números vão de 0 a 5 (zero corresponde a não mostrar nenhum dedo), o espaço amostral para esta situação é descrito por Ω = {(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,0), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}.

Sejam os eventos.

A " soma dos dedos das mãos dos dois jogadores é par",

A = {(0,0), (0,2), (0,4), (1,1), (1,3), (1,5), (2,0), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,0), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)}. Temos 18 possibilidades.

B "soma dos dedos das mãos dos dois jogadores é ímpar".

B = {(0,1), (0,3), (0,5), (1,0), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (3,0), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (4,5), (5,0), (5,2), (5,4)}. Total de 18 possibilidades.

Concluímos que as chances são iguais, a probabilidade de cada uma das somas é ½. Na sala de aula, foi mencionado que basta calcularmos a probabilidade de dar soma par. A probabilidade de dar soma ímpar é chamada probabilidade complementar de A e pode ser indicada por $\overline{\mathrm{A}}$. Estabelecemos:

P(A) = $\frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

P(B) = $\frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ ou P(B) = P($\bar{A}$) = 1 – P(A) = 1 – 0,5 = 0,5.

O jogo do par ou ímpar é um jogo justo se jogado com apenas uma das mãos.

E se jogarmos **usando as duas mãos** (cada jogador), num total de 20 dedos, o jogo continuaria justo?

Os alunos foram divididos em grupos para responder a pergunta. As equipes conseguiram concluir o jogo com o uso das duas mãos usando os conceitos adquiridos nas aulas de análise combinatória. O espaço amostral foi calculado através do princípio multiplicativo.

Cada jogador tem 11 possibilidades, (11)(11) = 121 possibilidades.

Seja o evento A "soma dos dedos das mãos é par", A = {(0,0), (0,2), (0,4), (0,6), (0,8), (0,10), (1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (2,0), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,1), (3,3), (3,5), (3,7), (3,9), (4,0), (4,2), (4,4), (4,6), (4,8), (4,10), (5,1), (5,3), (5,5), (5,7), (5,9), (6,0), (6,2), (6,4), (6,6), (6,8), (6,10), (7,1), (7,3), (7,5), (7,7), (7,9), (8,0), (8,2), (8,4), (8,6), (8,8), (8,10), (9,1), (9,3), (9,5), (9,7), (9,9), (10,0), (10,2), (10,4), (10,6), (10,8), (10,10)}.

Temos, P(A) = $\frac{61}{121} = 0{,}5041$.

A probabilidade de sair soma ímpar pode ser dada pela probabilidade complementar.

P($\bar{A}$)= 1 - $\frac{61}{121} = \frac{60}{121} = 0{,}4959$.

Se jogado com as duas mãos, o jogo do par ou ímpar não é um jogo justo. Mesmo sendo as diferenças entre as probabilidades consideravelmente pequena, 0,0082, a escolha por par possui probabilidade maior do que a escolha por ímpar. Os alunos afirmaram nunca ter pensado nisto antes e ficaram satisfeitos com a aula e a aplicação da probabilidade em atividades tão comuns e conhecidas por eles.

. Interdisciplinaridade.

Na terceira aula desenvolvendo esta atividade, os alunos assistiram ao vídeo sugerido País dos Raios, exibido pelo programa Fantástico. O dado foi lançado três vezes por todos os alunos e nenhum deles conseguiu obter uma sequência de três números dois.

6.2) AS MÉDIAS PODEM NÃO SER REPRESENTATIVAS?

O conceito de média, apesar de parecer muito simples, nem sempre é abordado com ênfase no ensino fundamental e médio. Apesar de sua simplicidade, o algoritmo do cálculo de média aritmética não é conceituado de maneira satisfatória no âmbito escolar. Na maioria das vezes é feito de forma mecânica com simples substituição de dados na fórmula. O aluno consegue desenvolver alguns exercícios, mas quando se faz necessário a sua utilização em situações do cotidiano ele se vê sem ferramentas adequadas para continuar seu raciocínio. O procedimento é trabalhado, mas o pensamento e a compreensão não.

É necessário incorporar, efetivamente, a Estatística no ensino aprendizagem criando situações em que o aprendizado da média seja significativo, incentivando assim o desenvolvimento de um raciocínio crítico. Desta forma, acreditamos que a média aritmética é um objeto de apreciável complexidade e não simplesmente um algoritmo e, por este motivo esta noção algorítmica só deveria ser introduzida depois que os estudantes tivessem desenvolvido um raciocínio consistente da representatividade deste conceito [40].

A maioria dos livros didáticos adotados pelas escolas não apresentam situações concretas que possam contribuir com a construção do conhecimento através de atividades exploratórias. Esta atividade, “As médias podem não ser representativas?”, sugere uma abordagem de médias e dos conceitos relacionados ao seu estudo de maneira significativa, com o tratamento adequado quanto à significância e representatividade de cada uma dessas medidas.

- **Série/ conteúdo:** A atividade é sugerida para turmas de 2º ou 3º ano do Ensino Médio ao trabalhar o eixo temático: números, contagem e análise de dados. Primeiramente, o professor deve desenvolver os conceitos de medidas de tendência central e medidas de dispersão conforme texto abaixo (Alguns Conceitos Necessários para o Estudo das Médias) ou seguindo o livro didático adotado por ele.

- **Objetivo**: levar os alunos à percepção de que as médias podem não ser representativas e através das situações propostas "Até que ponto o cálculo das médias pode não ser representativo?" e "Média e Incerteza", desenvolver o lado questionador e reflexivo, mostrando que a Matemática não é feita somente de cálculos e "regras" como muitos alunos afirmam, mas também de momentos onde o diálogo, o questionamento, a reflexão, a tomada de decisão têm espaço.

- **Interdisciplinaridade:** Propõe uma ligação direta da estatística e da probabilidade. Também pode ser estabelecida a interdisciplinaridade com o professor de filosofia ou sociologia ao discutir o problema dos alunos e suas notas em matemática citado no decorrer da atividade. O professor de filosofia ou sociologia pode ajudar a classe a tomar a melhor decisão e contribuir para que novos questionamentos surjam diante da situação de incerteza proposta pelo problema. É também interessante discutir subjetividade e assim, fazer a ponte entre a matemática e as demais matérias do currículo.

Deve ficar bem claro para o aluno que o estudo de probabilidade é abrangente e está ligado às mais diversas áreas do conhecimento.

- **Número de alunos por grupo:** 4.

- **Número de aulas:** 3 ou 4 .

6.2.1) ALGUNS CONCEITOS NECESSÁRIOS PARA O ESTUDO DAS MÉDIAS

As medidas de tendência central, como são conhecidas a média aritmética, a moda e a mediana são medidas utilizadas em estatística para representar um conjunto de dados pesquisados por valores pelos quais eles tendem a concentrar-se. Para cada situação obtida, uma dessas medidas pode ser a mais ou menos conveniente. A mais conhecida delas é a média aritmética, porém, não é em todo conjunto de valores que a média aritmética pode ser usada como a melhor medida de tendência central. Em um conjunto de valores onde há uma discrepância entre o menor e o maior valor, ou seja, a diferença entre eles é muito grande, a média aritmética não traça com exatidão o perfil desse conjunto.

Enquanto as medidas de tendência central buscam representar um conjunto de dados por meio de um único valor, em diversas situações faz-se necessário representar esse conjunto através de medidas de dispersão. Essas medidas indicam a distribuição dos valores do conjunto em torno da média. São elas: desvio médio, variância e desvio padrão.

Mostraremos como esses conceitos podem estar envolvidos em situações de incerteza.

- *Medidas de Tendência Central*

I) Média Aritmética

A média aritmética ($\overline{X}$), ou simplesmente média de um conjunto de n valores (x_1 , x_2 , ..., x_{n-1}, x_n) é dada pela expressão

$$\mathbf{\overline{X} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.}$$

Para entender o conceito de média aritmética [11].

1. A média está localizada entre os valores extremos (mínimo ≤ média ≤ máximo).
2. A soma dos desvios a partir da média é igual a zero ($\sum(x_i - \bar{x}) = 0$).
3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores.
4.A média não necessariamente tem que coincidir com um dos valores.
5. A média pode ser uma fração que não tem contrapartida na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por mulher igual a 2,3).
6. O cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos e os negativos.
7. A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada.

Algumas propriedades importantes no estudo das médias:

Tomemos um conjunto de valores (x_1 , x_2 , ..., x_n).

P1: $\overline{X}(k) = k$, k é um número real.

Para exemplificar esta propriedade tomemos o conjunto de valores (4,4,4,4), k = 4.

A média desse conjunto de valores será $\overline{X} = \frac{4+4+4+4}{4} = \frac{16}{4} = 4.$

P2: $\overline{X} . k = \overline{X} (kx_1 , kx_2 ,...,kx_n)$.

Podemos considerar a amostra (0, 1, 2, 5, 7).

A média desse conjunto é: $\overline{X} = \frac{0+1+2+5+7}{5} = 3.$

Considerando k = 6, temos $\overline{X}$ k = 3 . 6 = 18.

Se multiplicarmos cada um dos valores por 6 obtemos a nova amostra (0, 6, 12, 30, 42), cuja média é representada por , $\overline{X} = \frac{0+6+12+30+42}{5} = \frac{90}{5} = 18.$

Conclui-se que $\overline{X}k = \overline{X}$ de $(kx_1 , kx_2 ,...,kx_n)$.

P3: $\overline{X} + k = \overline{X}$ de $(k+x_1, k+x_2, ...,k+ x_n)$.

Tomemos a mesma amostra da propriedade acima (0, 1, 2, 5, 7) cuja média é igual a 3.

Sendo k = -4, temos $\overline{X}$ + k = 3 + (-4) = -1. Somando o valor -4 a cada termo da amostra obtemos (-4, -3, -2, 1, 3) cuja média é, $\overline{X} = \frac{-4+(-3)+(-2)+1+3}{5} = \frac{-5}{5} = -1.$

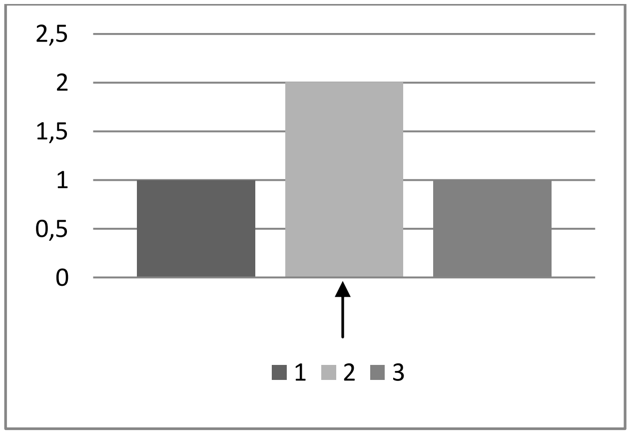
Sendo assim, é valida a propriedade 3.

Graficamente, podemos considerar o conceito de média da seguinte forma. Tomemos como exemplo as seguintes amostras, seus gráficos de colunas e suas médias (indicadas pelas setas). O eixo horizontal indicará o valor de cada elemento da amostra e o eixo vertical indicará o número de vezes que esse elemento aparece na referida amostra [18].

Amostra 1 = (1,2,2,3) .

Média aritmética = $\frac{1+2+2+3}{4} = 2.$

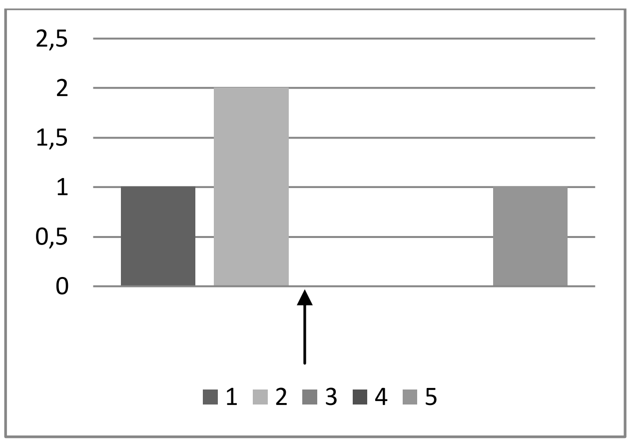
Gráfico 7 - Gráfico da amostra1 com seta indicativa da média aritmética desta amostra.



Amostra 2 = (1, 2, 2, 5).

Média aritmética : $\frac{1+2+2+5}{4} = 2{,}5.$

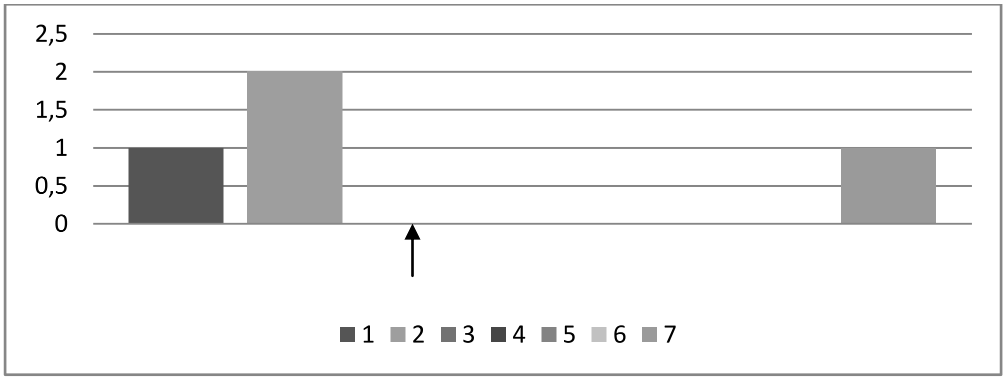
Gráfico 8 - Gráfico da amostra 2 com seta indicativa da média aritmética desta amostra.



Amostra 3 = (1, 2, 2, 7).

Média aritmética : $\frac{1+2+2+7}{4} = 3.$

Gráfico 9 - Gráfico da amostra 3 com seta indicativa da média aritmética desta amostra.



Percebemos que, aumentando o valor do último elemento da amostra e mantendo os demais elementos, a média se desloca para a direita. Da amostra 1 para a amostra 2, trocamos o último elemento de 3 para 5 e a média aumentou em 0,5, da amostra 2 para a amostra 3 trocamos o último elemento de 5 para 7 e a média também aumentou.

Considerando o eixo horizontal como um plano paralelo ao chão, uma placa de madeira ou gesso, ou até mesmo uma bandeja e, os elementos da amostra como os retângulos dos gráficos de colunas, com bases iguais e alturas correspondentes a quantidade de vezes em que o elemento aparece na amostra, a média aritmética representa o lugar de apoio para que este plano (placa de madeira ou gesso, bandeja) permaneça paralelo ao plano ao chão. Podemos relacionar média aritmética graficamente, como o ponto de equilíbrio para que o eixo horizontal permaneça paralelo ao plano do chão.

II)Mediana

Para encontrarmos a mediana, devemos dispor os valores do conjunto em ordem crescente. Chamamos esta distribuição de rol ou posto. Assim, se o conjunto tem um número ímpar de valores, a mediana corresponde ao termo central do rol. Se o conjunto apresenta um número par de valores, a mediana é calculada através da média aritmética dos dois termos centrais do rol.

Definição 9. Sejam $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ os n valores assumidos por uma variável quantitativa X, em um conjunto de observações.

A mediana é indicada por M_e, por meio da relação

$$\mathbf{M_e} = \begin{cases} \mathbf{x}_{\left(\frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}}\right)}, \mathbf{se\ n\ for\ ímpar} \\ \dfrac{\mathbf{x}_{\left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}\right)} + \mathbf{x}_{\left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}\right)}}{\mathbf{2}}, \mathbf{se\ n\ for\ par} \end{cases}.$$

A definição acima garante que a mediana seja um valor central que divide o conjunto de dados em dois subconjuntos com o mesmo número de elementos. Em um subconjunto, todos os elementos são menores do que (ou iguais) a mediana, no outro subconjunto, todos os elementos são maiores do que (ou iguais) a mediana.

A mediana de um grupo de valores $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ é um valor tal que, pelo menos metade dos valores é menor ou igual à mediana e pelo menos a outra metade dos valores é maior ou igual à mediana.

Na amostra (2, 3, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 12) com número ímpar de valores, a mediana é dada por $M_e = x_{\left(\frac{9+1}{2}\right)} = x_{(5)} = 6$. Se acrescentarmos a essa amostra o número 15, obtendo (2, 3, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15), a mediana será $M_e = \ = \dfrac{x_{\left(\frac{10}{2}\right)} + x_{\left(\frac{10}{2}+1\right)}}{2} = \dfrac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \dfrac{6+7}{2} = 6{,}5.$

III) Moda

É o valor mais frequente do conjunto de valores. Quando não há repetição de nenhum valor dizemos que o conjunto não possui moda, ou seja, é amodal. Quando possui duas modas é denominado bimodal, quando possui três modas é trimodal e assim por diante. Graficamente, a moda significa o máximo local.

Na amostra (1, 2, 3, 4, 5) não há moda, dado que nenhum dos valores se repete, temos uma amostra amodal. Já na amostra (2, 2, 3, 4, 5, 6,) a moda é igual a 2, essa amostra é unimodal. Se considerarmos a amostra (2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7) a moda é igual a 2 e 3, amostra bimodal; e assim, sucessivamente.

-*Medidas de dispersão*

I) Desvio Médio

O desvio médio (DM) de um conjunto de n valores (x_1, x_2, ..., x_n) é dado pela média aritmética dos valores absolutos dos desvios de cada valor em relação à média

$$\mathbf{DM}=\frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\cdots+|x_n-\bar{x}|}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{n}.$$

Observe que DM representa a média aritmética dos desvios entre x_i (i = 1, 2, ..., n) e $\bar{x}$, expressos pelo módulo da diferença entre o valor observado (x_i) e a média $\bar{x}$.

II) Variância

A variância de uma variável x é uma medida de dispersão dos valores da variável em torno da sua média.

A variância (σ^2) de um conjunto de n valores (x_1, x_2,..., x_n) é dada pela média aritmética dos quadrados dos desvios de cada valor em relação à média

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}.$$

Em qualquer situação a variância é um número real não negativo, pois o numerador da expressão é uma soma de quadrados em $\mathbb{R}$.

III)Desvio Padrão

No cálculo da variância os desvios de cada valor em relação à média são elevados ao quadrado, sendo que o resultado é obtido em uma unidade diferente da variável. O desvio padrão consiste na raiz quadrada da variância, o que resulta em um valor na mesma unidade da variável [20].

Portanto, o desvio padrão (σ) de um conjunto de n valores (x_1, x_2, ..., x_n) é dado pela raiz quadrada da variância

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2} \quad \text{ou} \quad \sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}.$$

O desvio padrão é útil para verificar a homogeneidade das observações em relação à média aritmética. Quanto menor o valor do desvio padrão, mais homogêneas são as observações em relação à média, o que indica maior densidade das observações próximas à média aritmética.

6.2.2) MEDIDAS DE CENTRALIDADE PARA DADOS AGRUPADOS

A MÉDIA PARA DADOS AGRUPADOS

Quando a amostra ou a população possui um número de observações muito grande é conveniente calcular as medidas descritivas a partir das distribuições de frequência. A média aritmética não pode ser determinada exatamente a partir de distribuições de frequências, mas uma boa aproximação pode ser obtida pela hipótese do ponto médio. A aproximação é sempre satisfatória se a distribuição for bem construída, isto é, se no agrupamento de dados originais de uma tabela de distribuição de frequência, emprega-se um número adequado de classes de frequência. A hipótese do ponto médio considera que todas as observações de uma dada classe estão centradas no ponto médio daquela classe. Consequentemente, o valor total da frequência da classe da i-ésima classe é simplesmente o produto $\mathbf{f_i \,.\, m_i}$, onde $\mathbf{f_i}$ é a frequência (absoluta simples) da classe **i** e $\mathbf{m_i}$ é o ponto médio da classe i. Sendo assim, a média aproximada para uma distribuição de uma amostra com k classes vem a ser

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f_1.m_1+f_2.m_2+\cdots+f_k.m_k}}{\mathbf{f_1+f_2+\cdots+f_k}} \cong \frac{\sum \mathbf{f_m}}{\sum \mathbf{f}}.$$

Os somatórios da equação referem-se às classes e não às observações individuais.

Exemplo 15. Podemos considerar o salário dos 23 funcionários de um estabelecimento comercial representados na Tabela 8 [20].

Tabela 8 - Salário dos funcionários.

SALÁRIO EM REAIS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIOS
400 ⊢ 1000	4
1000 ⊢ 1600	12
1600 ⊢ 2200	7

A média salarial dos funcionários da empresa é obtida calculando o ponto médio do intervalo e multiplicando esse valor pela frequência de funcionários do respectivo intervalo.

Tabela 9 - Ponto médio dos intervalos dos salários.

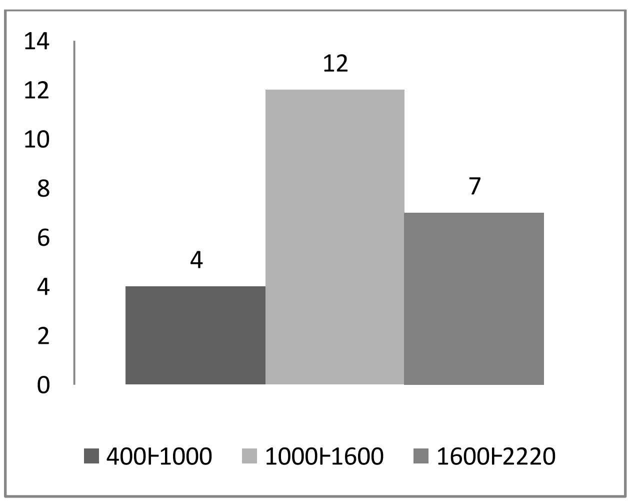
SALÁRIO EM REAIS	**PONTO MÉDIO DO INTERVALO**	**NÚMERO DE FUNCIONÁRIOS**
400 ⊢ 1000	(400+1000) / 2 = 700	4
1000 ⊢ 1600	(1000+1600) / 2 = 1300	12
1600 ⊢ 2200	(1600+ 2200) / 2 = 1900	7

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{700\ .4+1\ 300\ .12+1\ 900\ .7}{4+12+7} = \frac{31\ 700}{23} \cong 1378{,}26.$$

A média salarial é, aproximadamente, R$ 1 378,00.

A Tabela 9 pode ser representada graficamente através do Gráfico 10.

Gráfico 10- Frequência dos salários dos funcionários.

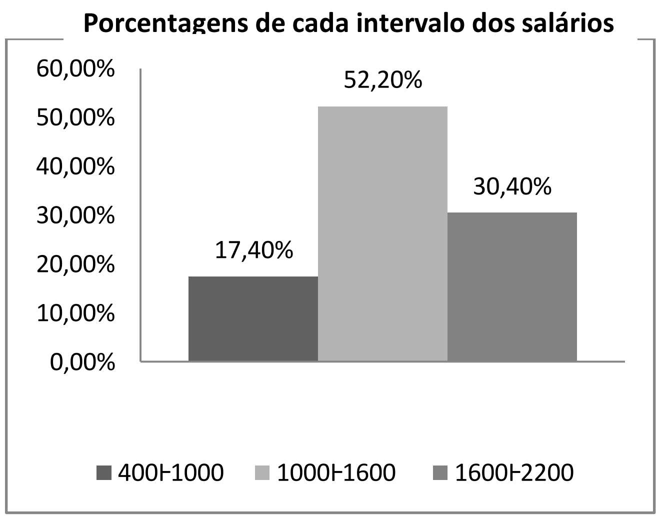


A MEDIANA PARA DADOS AGRUPADOS

Assim como é possível obter uma aproximação da média aritmética para dados agrupados, o mesmo pode ser feito para a mediana. O método usado é o da interpolação utilizando-se a distribuição de frequência acumulada. Inicialmente determina-se a classe que contem a mediana. Essa será a classe cuja frequência acumulada relativa correspondente a seu limite inferior é menor que 50% e a frequência acumulada relativa correspondente a seu limite superior é maior do que 50%. O próximo passo é a determinação exata do ponto onde se localiza a mediana naquela classe.

Para o Exemplo 15 dos salários dos 23 funcionários, temos o histograma com as porcentagens aproximadas de cada intervalo.

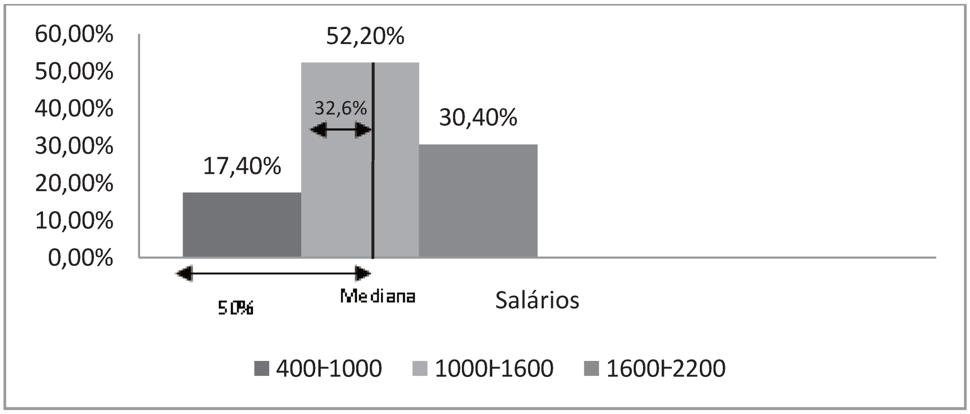
Gráfico 11 - Porcentagem dos intervalos dos salários.



Pelo Gráfico 11, notamos que ao final do primeiro intervalo encontram-se 17,4% do total de valores e ao final dos dois primeiros intervalos, encontram-se acumulados 17,4% + 52,2% = 69,6% do total de valores.

Com base nas observações anteriores, conclui-se que a mediana encontra-se no segundo intervalo. De seu limite inferior (1000) até a mediana concentram-se 50% - 17,4% = 32,6% do total de valores.

Gráfico 12 - Gráfico representativo da mediana dos salários.



Pelo Gráfico 12, no segundo intervalo, o retângulo que contém os 32,6% possui a mesma altura do retângulo que contém os 52,20%, tem-se que a área de cada um desses retângulos (expressa como porcentagem da área total sob o histograma) é diretamente proporcional à medida de dua base, isto é

$$\frac{\mathbf{M_e - 1000}}{\mathbf{32{,}6\%}} = \frac{\mathbf{1600 - 1000}}{\mathbf{52{,}2\%}} \Rightarrow \mathbf{M_e \cong 1374{,}41\ reais.}$$

A MODA PARA DADOS AGRUPADOS

A classe modal é a classe que apresenta maior frequência absoluta. No exemplo anterior, a classe modal é 1 000 ⊢ 1 600, pois há 12 valores pertencentes a esse intervalo (as outras frequências são menores: 4 e 7).

Uma observação se faz necessária. É possível calcular os valores aproximados da mediana e da moda para dados agrupados quando o último intervalo de classe tem limite superior indeterminado. Para a mediana o resultado é imediato, no caso da moda, o seu cálculo somente pode ser feito se a última classe não for a classe modal e é preciso primeiramente calcular as densidades de frequência. O cálculo da média nessa situação não é possível, o que demonstra que para alguns problemas temos que contar com a mediana como medida de tendência central.

A Tabela 10, mostra comparativamente algumas características das principais medidas de posição ou centralidade.

Tabela 10 - Principais características das medidas de centralidade.

MÉDIA ARITMÉTICA	MEDIANA	MODA
-Afetada por todas as observações e é influenciada pelas magnitudes absolutas dos valores extremos na série de dados. -Possibilita maior manipulação algébrica. -Em amostragem, a média é uma estatística estável.	-Seu valor é afetado pelo número de observações e como elas são distribuídas mas não é afetada pelos valores das observações extremas. - Pode ser obtida em distribuições com limites superiores indeterminados para a última classe. - É a mais adequada para descrever observações que são ordenadas ao invés de medidas.	- É o valor mais típico de uma distriubição. Ela representa o seu valor mais provável. - Não é influenciada pelos valores extremos da distribuição e não permite manipulações algébricas como a fórmula da média.

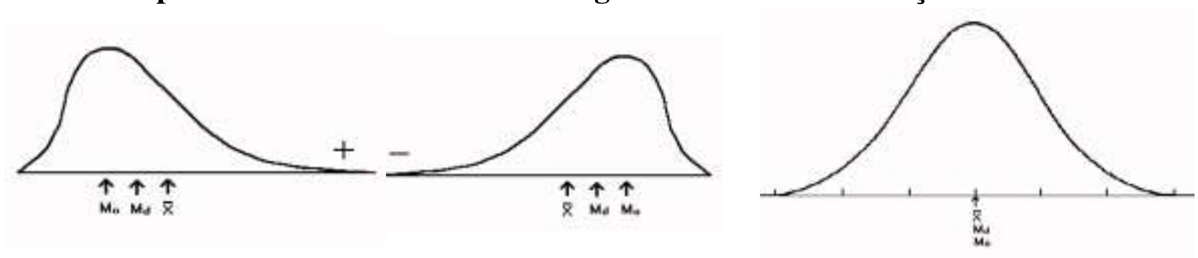
Existem algumas relações entre as diversas medidas de posição.

- Numa distribuição simétrica e unimodal, temos: média = mediana = moda.
- Numa distribuição positivamente assimétrica: média > mediana > moda, a distância entre a mediana e a média é cerca de um terço da distância entre a moda e a média.
- Para uma distribuição negativamente assimétrica: média < mediana < moda, a distância entre a mediana e a média é cerca de um terço da distância entre a moda e a média.

Os gráficos abaixo, Figura 14, mostram as posições relativas da média, mediana e moda em função da assimetria das distribuições [37].

Figura 14- Assimetria das distribuições.

Assimetria positiva **Assimetria negativa** **Distribuição simétrica**



6.2.3) MEDIDAS DE DISPERSÃO PARA DADOS AGRUPADOS

Muitas amostras podem apresentar a mesma média, no entanto, os dados de cada uma dessas amostras podem se distribuir em torno de cada uma das médias de forma distinta. Na análise descritiva de uma distribuição estatística é fundamental, além da determinação de uma medida de tendência central, conhecer a dispersão dos dados e a forma da distribuição. Duas séries de dados podem possuir a mesma média, mas uma pode apresentar valores mais homogêneos (ou menos dispersos em relação à média) do que a outra. As medidas de dispersão ensinadas no ensino médio são amplitude, variância, desvio padrão e desvio médio.

A amplitude é facilmente assimilada. É a medida de dispersão mais simples, consiste na diferença entre o maior e o menor valor dos dados de uma amostra. Para uma distribuição de frequência que usa intervalos de classe, a amplitude pode ser considerada como a diferença entre o maior e o menor limite de classe ou a diferença entre os pontos médios dos intervalos de classe extremos.

O desvio padrão é a mais usada das medidas de variabilidade. Infelizmente, o desvio padrão não tem uma interpretação intuitivamente óbvia. Na Seção 5.2 (as médias podem não ser significativas?) apresentamos o cálculo do desvio padrão da população conforme apresentado nos livros didáticos para o ensino médio

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Há certa dificuldade em relação ao cálculo da variância e do desvio padrão pelo aluno do Ensino Médio. Muitas vezes, ele não entende a aplicabilidade dessas medidas, e não consegue interpretar o cálculo segundo o contexto aplicado. Para facilitar a assimilação desses conceitos, a análise do desvio padrão pode ser feita a partir da porcentagem de observações que estão a k desvios da média. De preferência, com um número maior de observações para permitir ao aluno melhor compreensão da porcentagem de valores compreendidos no intervalo $(\overline{X} \pm k\sigma)$ [20].

A escolha de aumentar o tamanho da amostra pode ocasionar dificuldades em relação aos procedimentos para a obtenção do desvio padrão, o que pode ser contornado com o auxílio de uma calculadora, o uso de planilha eletrônica ou o agrupamento dos dados. Em contrapartida, uma amostra maior possibilita melhor compreensão do conceito de desvio padrão.

Exemplo 16. Consideremos as alturas dos 50 alunos de uma sala.

Tabela 11 - Rol das alturas dos alunos.

Rol das alturas dos 50 alunos (em cm).

142	147	149	152	153	154	156	157	158	160
143	148	150	152	154	155	156	157	159	160
144	148	150	152	154	155	156	157	159	161
145	149	151	153	154	155	156	157	159	161
145	149	152	153	154	155	156	158	160	162

Para estes valores, a média é $\overline{X} = \frac{7682}{50} = 153{,}64$ cm.

O desvio padrão é $\sigma = \sqrt{\frac{1213{,}52}{50-1}} \cong 4{,}9765$ cm.

Podemos arredondá-lo, ou seja, $\sigma = 4{,}98$ centímetros.

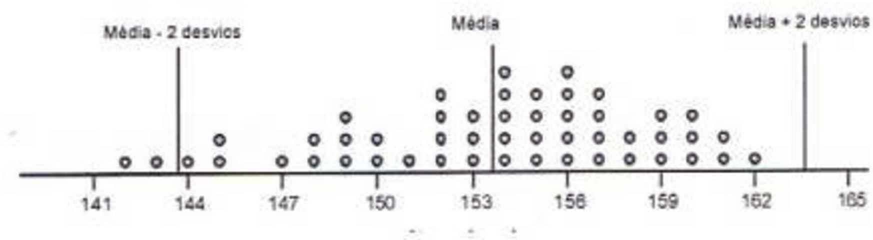
A partir da altura da população ($\overline{X} = 153{,}64$ cm e $\sigma = 4{,}98$ cm) escolhe-se o número de desvios-padrão e elabora-se o intervalo a partir da média de mais ou menos k desvios-padrão. Vamos considerar k = 2, dois desvios-padrão da média,

$$[(153{,}64 - 2 \,.\, 4{,}98),(153{,}64+2 \,.\, 4{,}98)] = [143{,}68 \,;\, 163{,}6].$$

Temos apenas dois alunos fora desse intervalo e 48 alunos dentro desse intervalo, logo $\frac{48}{50} = 0{,}96 \,.\, 100 = 96\%$.

Outra maneira de visualizar essa situação é através do gráfico de dotplot, Gráfico 13.

Gráfico 13- Gráfico de pontos das alturas.

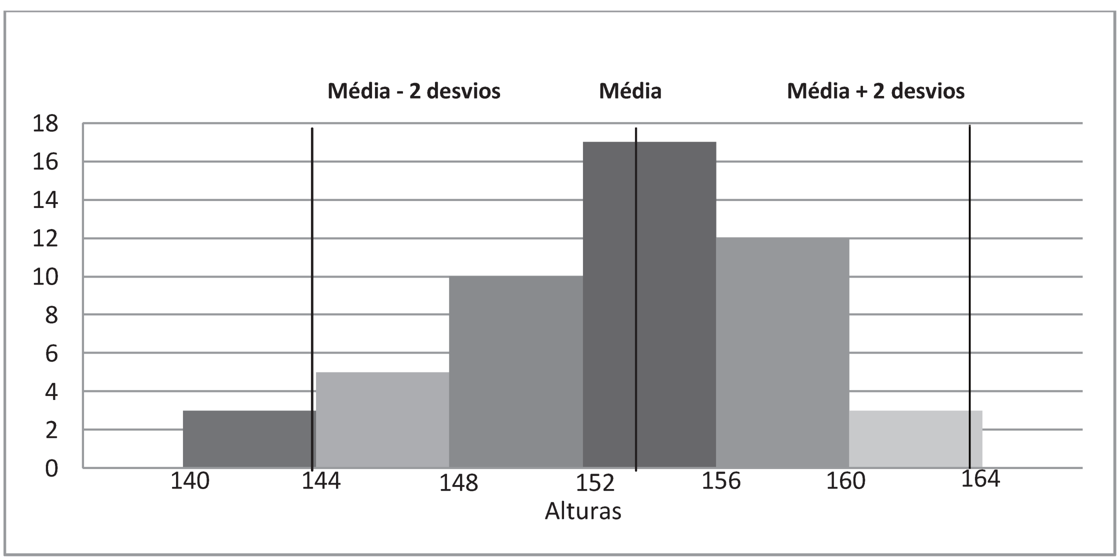


Neste gráfico, cada observação é representada por um ponto numa reta (com a escala dos valores da variável) e se há mais de uma observação com o mesmo valor, eles são “empilhados”. Para se observar a densidade dos pontos em torno da média, pode ser traçado um segmento de reta, perpendicular à reta dos valores da variável, no valor que representa a média aritmética e os limites do intervalo $(\overline{X} \pm k\sigma)$.

A vantagem do gráfico de dotplot é permitir visualizar melhor a situação descrita.

Outra alternativa é a utilização do histograma, gráfico utilizado para representar variáveis contínuas, apresentado no Gráfico 14.

Gráfico 14 - Histograma das alturas.



Foram traçados os segmentos de reta para indicar a média e os limites do intervalo $(\overline{X} \pm k\sigma)$.

Este gráfico não permite visualizar claramente que apenas duas observações (dois alunos) não estão no intervalo $(\overline{X} \pm k\sigma)$, como é possível notar no gráfico de pontos.

A tarefa de contar o número de observações em um intervalo $(\overline{X} \pm k\sigma)$, pode se tornar exaustiva quando esse número for muito grande (milhares, milhões). Justifica-se assim, a utilização de estimativa da porcentagem de observações a menos de n desvios da média.

Uma maneira de estimar tal intervalo é o Teorema de Tchebichev ou Tchebycheff. Este teorema pode ser utilizado com alunos do ensino médio, pois é aplicado para qualquer conjunto numérico, independente de sua distribuição de probabilidades [37].

O teorema enuncia.

A proporção ou fração de qualquer conjunto de dados a menos de k desvios-padrão a contar da média é sempre ao menos $1 - \frac{1}{k^2}$*, onde k é um número positivo maior do que 1. Para k=2 , k=3 e k = 4, temos os seguintes resultados específicos:*

-Ao menos $\frac{3}{4}$ *ou 75% de todos os valores estão no intervalo que vai de 2 desvios-padrão abaixo da média a 2 desvios-padrão acima da média* $(\bar{X} \pm 2\sigma)$.

- Ao menos $\frac{8}{9}$ *(ou 89% aproximadamente) de todos os valores estão no intervalo que vai de 3 desvios-padrão abaixo da média até 3 desvios-padrão acima da média* $(\bar{X} \pm 3\sigma)$.

- Ao menos $\frac{15}{16}$ *(ou 93,75%)de todos os valores estão no intervalo que vai de 4 desvios-padrão abaixo da média até 4 desvios padrão acima da média* $(\bar{X} \pm 4\sigma)$.

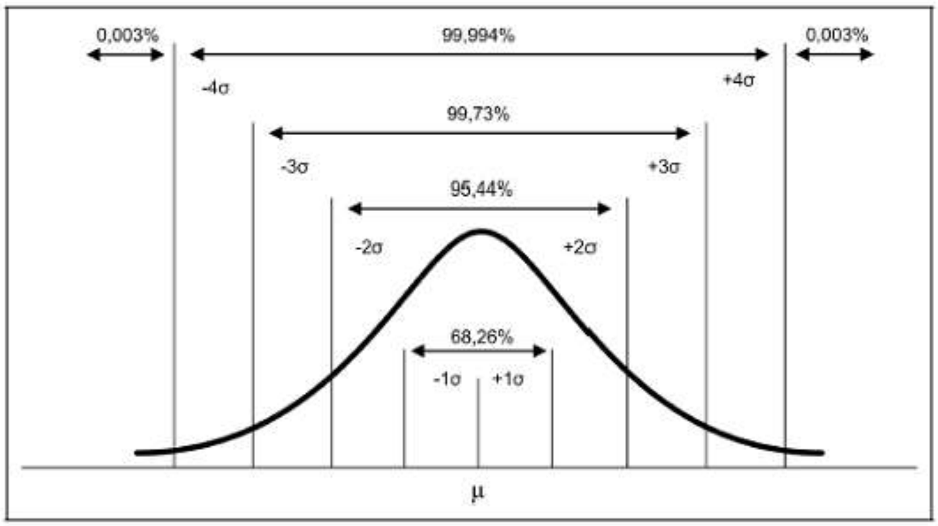
Segundo o Teorema de Tchebichev, pelo menos 75% dos alunos têm altura entre 143,68 cm e 163,60 cm, o que representa uma estimativa da porcentagem de observações no intervalo $(\overline{X} \pm 2\sigma)$. No exemplo foram obtidos 96% dos alunos nesse intervalo, o que confirma o Teorema de Tchebichev.

A interpretação que deve ficar bem clara principalmente ao aluno, é que apesar da margem de diferença, o teorema afirma que há **pelo menos 75%** das observações nesse intervalo, ou seja, 75% ou mais das observações nesse intervalo.

O Teorema de Tchebichev é aplicado a qualquer distribuição e, quando conhecida, a porcentagem pode ser melhor estimada, como no caso de distribuições simétricas, em que se pode utilizar a Distribuição Normal. Quando se sabe que o conjunto de observações segue uma Distribuição Normal, sabe-se que cerca de 68,26% dos valores estão a menos de um desvio padrão da média (para cima e para baixo da média); cerca de 95,44% dos valores estão a menos de dois desvios padrão da média e cerca de 99,73% estão a menos de três desvios padrão da média.

A Figura 15 apresenta graficamente a Distribuição Normal [37].

Figura 15 - Distribuição normal.



A Distribuição Normal é conhecida como distribuição gaussiana e é a mais importante distribuição contínua. Esse tipo de distribuição apresenta-se em formato de sino, unimodal e simétrica em relação à sua média ($\overline{X}$). Diversos estudos práticos tem como resultado uma distribuição normal, como a altura de uma determinada população em geral, entre outras características físicas e sociais.

Uma variável aleatória contínua X tem Distribuição Normal se sua função densidade de probabilidade for dada por,

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}, \text{ para } -\infty < x < +\infty.}$$

As principais características dessa função são:

- O ponto de máximo de f(x) é o ponto $X = \overline{X}$.
- Os pontos de inflexão da função são $X = \overline{X} + \sigma$ e $X = \overline{X} - \sigma$.
- A curva é simétrica com relação a $\overline{X}$.

Insere-se mais uma variável a ser trabalhada com alunos do ensino médio. É possível verificar se as observações trabalhadas em sala de aula seguem a distribuição normal ou não. O histograma do Gráfico 14 pode ser usado para estimar, visualmente, o formato da distribuição. A altura dos alunos não é simétrica em relação à média aritmética (condição da Distribuição Normal), mas se aproxima da simetria. Pode-se usar a porcentagem de observações sob a curva normal para estimar o intervalo das alturas que diferem da média em não mais do que dois desvios padrão, já calculado anteriormente [143,68 ; 163,60].

Utilizando a porcentagem de dados sob a curva normal, é possível dizer que, aproximadamente, 95% dos alunos têm alturas entre 143, 68 cm e 163,60 cm de altura.

De acordo com os cálculos feitos anteriormente, 96% dos alunos têm alturas entre a média mais ou menos dois desvios padrão. Isso indica que, para o exemplo, a estimativa de porcentagens segundo a curva normal é mais próxima da realidade observada na amostra do que a análise segundo o Teorema de Tchebichev.

O conhecimento da estimativa da porcentagem de observações no intervalo ($\overline{X} \mp 2\sigma$), seja pelo Teorema de Tchebichev ou pela Distribuição Normal de Probabilidade, deve encorajar o professor de Matemática a desenvolver com seus alunos a tarefa de contagem do número de observações no intervalo ($\overline{X} \mp K\sigma$), de maneira a propiciar condições de desenvolvimento da noção intuitiva da densidade de observações em torno da média aritmética.

No exemplo da altura dos alunos foram obtidas as medidas (média e desvio padrão), a porcentagem de observações no intervalo composto pela média mais ou menos dois desvios padrão da média, estimada a porcentagem de observações no intervalo por meio do Teorema de Tchebichev e pela Distribuição Normal, foram elaborados gráficos de histograma, pontos dentro e fora do intervalo mais ou menos dois desvios padrão da média.

Todas essas representações têm o intuito de permitir ao aluno construir o campo conceitual de variação em torno da média e tornar seu raciocínio sobre este assunto mais avançado e consistente.

O DESVIO PADRÃO PARA DADOS AGRUPADOS

O cálculo do desvio padrão a partir de uma distribuição de frequências pode ser realizado de duas maneiras. Na primeira, é contado o número de casos de cada observação diferente, denominada distribuição de frequência simples. Nesse caso, ao calcularmos o desvio padrão, não há nenhuma perda de informação, ou seja, o desvio padrão obtido com os dados brutos (conjunto numérico original) é o mesmo obtido a partir da distribuição de frequência simples. Na segunda, a variável observada é agrupada em classes e então é contado o número de casos em cada classe, o que denominamos distribuição de frequência com dados agrupados. Utilizando essa estratégia, as observações são agrupadas segundo algum critério.

Para o exemplo das alturas dos 50 alunos, tomaremos a distribuição de frequência com dados agrupados num intervalo de quatro centímetros apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 - Distribuição de frequências com dados agrupados.

Altura Agrupada em Classes	Ponto Médio da classe X_i	Número de alunos f_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 . f_i$
[140,144[	142	2	135,4896	270,9792
[144,148[	146	4	58,3696	233,4784
[148,152[	150	8	13,2496	105,9968
[152,156[	154	16	0,1296	2,07369
[156,160[	158	14	19,0096	266,1344
[160,164[	162	6	69,8896	419,3376
Somatório				1298,00

Percebe-se que os alunos contidos em uma classe têm sua altura representada pelo ponto médio da classe. Os dois alunos da primeira classe [140,144[, cujas alturas eram 142 cm e 143 cm, são considerados com altura igual a 142 cm, que é o ponto médio do intervalo. Os quatro alunos agrupados na segunda classe (144 cm, 145 cm, 145 cm, 147 cm) foram considerados com altura igual a 146 cm e, assim sucessivamente. Isso faz com que ocorra uma perda de informação, devido à substituição da altura original pela altura representativa através do ponto médio da classe.

Sendo assim, o cálculo do desvio padrão para os dados agrupados em classe conforme tabela é representado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum(\mathbf{x_i}-\bar{\mathbf{x}})^2\mathbf{f_i}}{\sum \mathbf{f_i}-\mathbf{1}}} \Longrightarrow \sqrt{\frac{\mathbf{1298}}{\mathbf{50-1}}} = \mathbf{5,1468} \cong \mathbf{5,15} \ \textbf{cm.}$$

O valor encontrado para o desvio padrão através de dados agrupados em classe σ = 5,15 cm é diferente do valor encontrado anteriormente σ = 4,98 cm.

O cálculo do desvio padrão através de dados agrupados é muito útil quando a variável trabalhada for contínua, como por exemplo, peso e altura. Os cálculos tornam-se menos exaustivos, porém, deve-se ter noção de que o valor encontrado para o desvio padrão é um valor aproximado

6.2.4) ATÉ QUE PONTO O CÁLCULO DE MÉDIAS PODE SER SIGNIFICATIVO?

Após trabalhar os conceitos estatísticos de medidas de tendência central e de dispersão, o professor pode apresentar à turma as duas situações propostas envolvendo média. Fica a critério do professor, fornecer ou não o texto pronto como está citado neste trabalho. Porém, é interessante apresentar os problemas aqui sugeridos deixando os alunos realizarem os cálculos necessários para as medidas de centralidade e dispersão, obtendo assim suas próprias conclusões.[9] Este texto é um material de apoio para que o professor desenvolva a atividade.

AS MÉDIAS SÃO SEMPRE SIGNIFICATIVAS?

Para muitos alunos e até mesmo professores tirar a média aritmética de um conjunto de números é um processo muito fácil. A maioria dos alunos do ensino fundamental e médio baseia-se em fórmulas e mais fórmulas para realizar cálculos em matemática e, o mesmo acontece com as médias. Quando falamos sobre médias na sala de aula, de imediato ouvimos algum aluno se pronunciar “basta somar todos os elementos e dividir pela quantidade de elementos do conjunto”.

Contudo, estudar média aritmética não é somente adicionar certo número de valores e por fim dividir a soma por esse número de valores. A questão vai mais longe, o que podemos deduzir quando calculamos uma média? O que essa média quer nos dizer? Como usar as médias para o que realmente elas foram inventadas, fazer previsões em situações em que existe incerteza?

[9] No apêndice encontra-se um modelo pronto para esta atividade.

Muitas vezes, em situações rotineiras, várias pessoas usam da média aritmética de forma errônea e chegam a respostas dúbias. Diante desse acontecimento sempre há a pergunta, o que eu fiz de errado? Parece que o cálculo foi feito corretamente, mas não obtivemos uma mesma resposta diante das situações. Enfim, uma média pode enganar e muito. Vamos dar um exemplo para mostrar como a média pode enganar.

Exemplo 17 [10].

Suponhamos que você trabalha numa empresa e seu chefe pede para que examine uma planilha eletrônica com o número diário de pessoas que visitaram o website da empresa no mês de abril do corrente ano durante 4 semanas, e realize a média diária dos visitantes desse mês.

Empolgada com essa simples e modesta missão, você rapidamente calcula a média de visitantes para cada semana. Depois soma as quatro médias semanais, divide-as por quatro, obtendo assim uma nova média, a média das médias semanais e depois multiplica o valor por quatro para obter a média diária mensal. Rapidamente, para demonstrar sua eficiência, mesmo sem prestar muita atenção ao resultado encontrado, você apresenta a sua resposta ao chefe e leva um susto quando ele lhe interroga. "Mas o que você fez está certo? É o mesmo que somar esses vinte e oito valores e dividi-los por vinte e oito? Esse número encontrado não é um pouco absurdo?"

Você permanece em silêncio e não sabe se o que fez está correto e equivale ao mesmo que somar o número de visitantes e dividir por vinte e oito. Afinal, você quis ter as médias semanais como um dado a mais para o problema e tentar impressionar o seu chefe com algumas informações adicionais, demonstrando agilidade de raciocínio e competência. Agora, analisando o resultado você percebe que há algo de errado no valor encontrado.

Para ilustrar melhor este problema e encontrarmos o erro, vamos fornecer os valores e realizar os cálculos necessários.

A Tabela 13 representa o número de indivíduos que visitaram o website da empresa durante o decorrer das quatro primeiras semanas do mês de abril.

Tabela 13 - Número de visitantes/dia do website da empresa no mês de abril.

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo	TOTAL DA SEMANA
1ª semana	35	38	29	42	50	55	43	292
2ª semana	100	27	49	65	48	95	54	438
3ª semana	85	70	62	112	98	102	80	609
4ª semana	90	86	45	86	65	120	84	576

Média de visitantes da 1ª semana: $\frac{35+38+29+42+50+55+43}{7} = 41{,}714.$

Média de visitantes da 2ª semana: $\frac{100+27+49+65+48+95+54}{7} = 62{,}571.$

Média de visitantes da 3ª semana: $\frac{85+70+62+112+98+102+80}{7} = 87.$

Média de visitantes da 4ª semana: $\frac{90+86+45+86+65+120+84}{7} = 82{,}286.$

Médias das médias semanais: $\mathbf{\frac{41{,}714+62{,}571+87+82{,}286}{4} = 68{,}393.}$

A média diária de internautas que visitaram o website por semana é de 68,393 internautas, ou seja, aproximadamente 68 internautas. A média das médias multiplicada por quatro fornece o valor de 273,572. A média diária desse mês seria de 274 internautas aproximadamente visitando o site. Um número absurdo para a média diária mensal de internautas, tendo como base os valores da tabela.

Realizando o cálculo conforme o gerente solicitou, somando-se todos os valores da tabela obtém-se o número 1915. Sendo assim, 1915 internautas visitaram o website no decorrer do mês de abril. Dividindo 1915 por 28 encontramos a média de 68,393. Esse é o valor correto para representar a média aritmética diária dos internautas durante o mês de abril, o mesmo valor encontrado para a média das médias semanais. O erro está em multiplicar por quatro para obter a média diária mensal. Neste problema a média das médias semanais é a mesma da média aritmética simples, porque o número de elementos de cada subconjunto é igual a 7. Sendo assim, realizar a média das quatro semanas, corresponde ao mesmo que dividir a soma de todos os valores por 28. Mas, nem sempre a média das médias e a média aritmética de um conjunto de valores corresponde a um mesmo resultado.

Veja, seja d_i o dia do mês para i = (1, 2, 3, ...27,28), temos

$$\frac{\frac{d_1+d_2+\cdots+d_7}{7}+\frac{d_8+d_9+\cdots d_{14}}{7}+\frac{d_{15}+d_{16}+\cdots+d_{21}}{7}+\frac{d_{22}+d_{23}+\cdots+d_{28}}{7}}{4}=\frac{d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{27}+d_{28}}{28}.$$

Quando precisamos da média aritmética de todos os elementos de um conjunto, que nesse caso são os dias do mês, não podemos pegar o atalho de trabalhar com média das médias de subconjuntos desse conjunto, que nesse caso são as semanas do mês e depois multiplicar por quatro novamente, imaginando que assim teremos um valor da média correspondente ao mês.

O erro está quando você ao pensar nos 28 dias da tabela, realiza a média para 7 dias e acha que multiplicar por 4 resulta na mesma média para os 28 dias. É um erro bastante comum e ilustra o quanto o cálculo com médias pode não ser significativo e nos colocar diante de dúvidas sobre se o caminho adotado é correto.

Vejamos outro exemplo que ilustra que a média das médias é diferente da média aritmética quando o número de elementos de cada subconjunto é distinto.

Exemplo 18. Consideremos duas famílias com as seguintes idades,

Família A com idades: pai = 60 anos, mãe = 55 anos e filho= 30 anos.

A média aritmética da família A é MA = $\frac{60+55+30}{3}=48{,}33$ anos.

Família B com idades: pai = 58 anos, mãe = 55 anos, filho = 28 anos, filho = 20 anos e filha= 15 anos.

A média aritmética da família B é MB = $\frac{58+55+28+20+15}{5}=35{,}2$ anos.

Média aritmética das médias das idades das famílias $\frac{MA+MB}{2}=\frac{48{,}33+35{,}2}{2}=41{,}765$ anos.

Podemos aproximar a média das médias das idades das famílias para 42 anos.

Agora vejamos a média aritmética do total de pessoas das famílias

$M = \frac{60+55+30+58+55+28+20+15}{9} = 35{,}67$ anos.

Podemos aproximar a média aritmética do total de pessoas das famílias para 36 anos.

Percebemos que a diferença entre as médias é de 6 anos. Neste caso, não podemos afirmar que há erro de cálculo e que um procedimento deve estar correto enquanto o outro certamente estará errado. Cada um deles tem um significado diferente e é correto em seu contexto.

Se quisermos saber se as famílias de uma cidade ou de um país são jovens ou não, a média das idades médias das famílias é a mais adequada, o que no exemplo corresponde à média de 42 anos aproximadamente.

Por outro lado, a soma total dividida pelo número de pessoas obtém a idade média do total de pessoas (e não de famílias) de uma região. É o que os centros de pesquisa fazem para obter a idade média de uma cidade, estado ou país. A média total das idades das pessoas no nosso exemplo é de 36 anos.

Sendo assim, percebemos que nem sempre, ao termos duas sequências A e B, com médias MA e MB, respectivamente, obter a média da união dessas sequências levará ao mesmo resultado quando somarmos todos os números dessas duas sequências e dividirmos pelo total de números. Média e média das médias podem apresentar resultados diferentes.

6.2.5) MÉDIA E INCERTEZA

Ao estudar probabilidade e estatística deve ficar claro para o aluno que as médias são usadas para fazer previsões em situações que existe incerteza. Diante da incerteza ele irá tomar decisões sabendo, contudo, que não importa a qualidade de sua análise, ele pode errar ou acertar. Nunca teremos certeza absoluta diante de um problema envolvendo incerteza mesmo que as informações sejam abundantes.

Exemplo 19. Para entender melhor a situação podemos considerar o seguinte caso hipotético, as notas bimestrais de dois alunos A e B, ao longo dos três anos de ensino médio, em matemática. As notas estão dispostas em ordem de bimestre e ano.

Aluno A = { 7, 6, 5, 5, 7, 6, 5, 5, 7, 6, 5, 5 }

Aluno B = { 4, 4, 5, 7, 4, 4, 5, 7, 6, 6, 7, 9 }.

Ao apresentar as notas dos dois alunos lançam-se as perguntas.

Qual aluno obteve melhor desempenho em Matemática no decorrer do ensino médio?

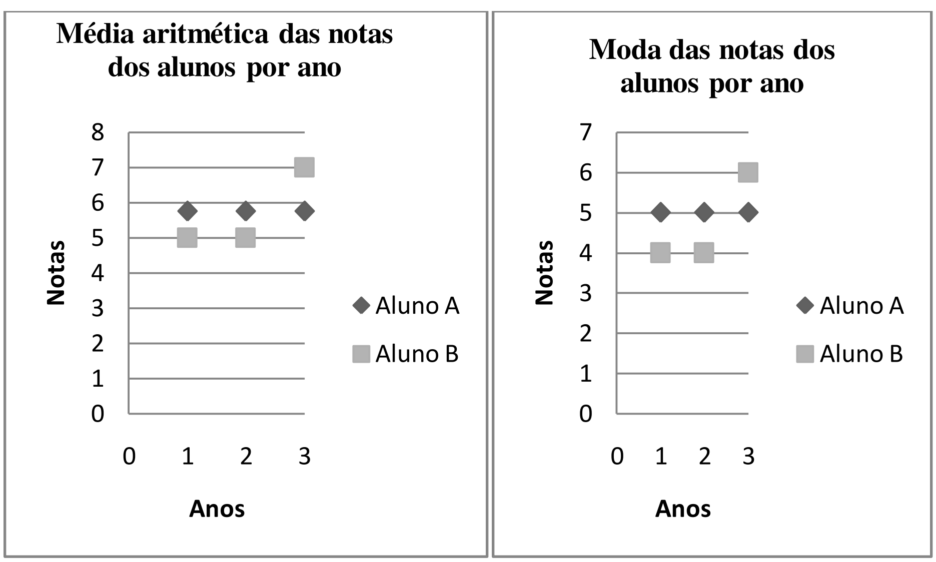
-Qual deles poderia ser indicado para cursar Matemática ou área afim?

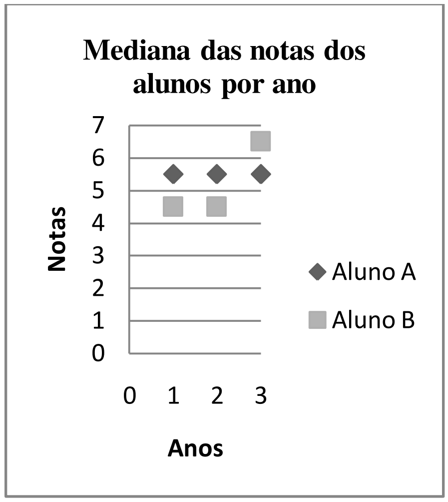
Podemos determinar a média, a moda e a mediana por ano de cada um dos alunos, conforme tabela e gráficos. A Tabela 14 apresenta as medidas de centralidade de cada aluno em cada um dos anos do ensino médio.

Tabela 14 - Média, Moda e Mediana dos Alunos A e B por Ano.

	1º Ano		2º Ano	3º Ano
Média Aritmética	Aluno A	5,75	5,75	5,75
	Aluno B	5	5	7,0
Moda	Aluno A	5	5	5
	Aluno B	4	4	6
Mediana	Aluno A	5,5	5,5	5,5
	Aluno B	4,5	4,5	6,5

Gráfico 15 - Média aritmética, moda e mediana das notas dos alunos por ano.





Se analisarmos o decorrer dos três anos podemos verificar que o aluno B teve uma significante melhora. Sua média de 5 pontos foi para 7 pontos no 3º ano. Enquanto o aluno A manteve sua média sempre igual a 5,75. Ao analisarmos as notas individualmente, o aluno A tira notas altas no começo do ano e depois suas notas vão diminuindo. Isso pode demonstrar desleixo. Enquanto o aluno B começa com notas mais baixas e vai melhorando ao longo do ano. A moda e a mediana do aluno B no 3º ano também são maiores em relação à moda e a mediana do aluno A. Se a análise fosse feita somente sobre as notas do 3º ano, não haveria dúvidas de que o melhor aluno seria o aluno B em termos de notas.

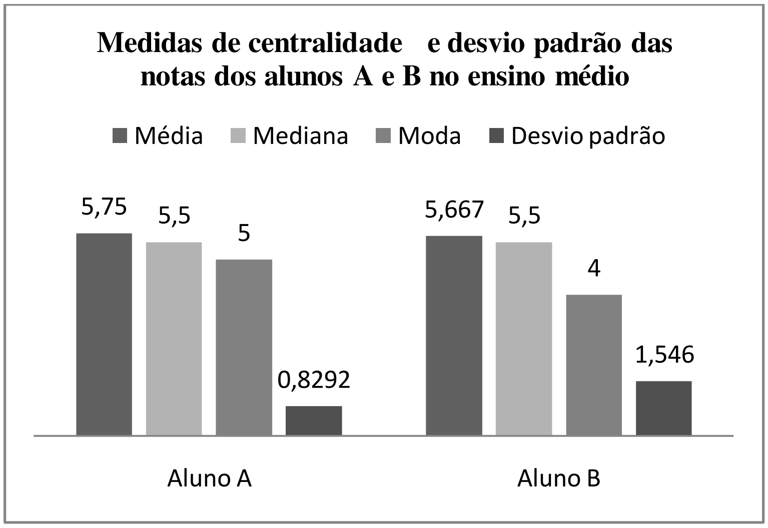
No contexto, o aluno B é mais esforçado e como sua média no 3º ano foi superior à média do aluno A, ele ganha destaque e é muito comum indicar esse aluno para cursar Matemática, dado seu crescimento no decorrer do ensino médio.

Agora, se a análise for feita sobre a tabela abaixo, a opinião de que o aluno B possa ser melhor nem sempre vai prevalecer. A Tabela 15 e o Gráfico 16 apresentam as medidas de centralidade e o desvio padrão, considerando os três anos do ensino médio.

Tabela 15 - Média, Mediana, Moda e Desvio Padrão dos Alunos A e B no ensino médio.

	Ensino Médio	
Média Aritmética	Aluno A	5,75
	Aluno B	5,667
Moda	Aluno A	5
	Aluno B	4
Mediana	Aluno A	5,5
	Aluno B	5,5
Desvio Padrão	Aluno A	0,8292
	Aluno B	1,546

Gráfico 16 - Medidas de centralidade e dispersão para as notas dos alunos no ensino médio.



Com estes dados percebemos que o aluno A ganha em mais quesitos do que o aluno B. Ele possui maior média aritmética, maior moda e menor desvio padrão. Mas será que essa análise garante realmente que o aluno A é melhor do que o aluno B?

Aí é que entra a incerteza e a subjetividade. Quando associamos a esse problema novos questionamentos ou novas informações a opinião de que o aluno A terá melhor desempenho num curso de exatas do que o aluno B pode mudar, ou vice-versa. Percebemos que as abordagens diferentes do problema identificam no 1º caso o aluno B com maior desempenho e no 2º caso, o aluno A, gerando controvérsias a respeito de quem realmente seja o melhor aluno.

Fazer uma discussão incluindo novos parâmetros para análise na sala de aula do 2º ano do ensino médio levará à percepção da subjetividade e a relação das médias em situações de incertezas. Um debate pode ser feito questionando-se quem será o melhor aluno quando considerarmos:

- Os dois alunos estudavam na mesma escola?
- Os dois alunos tiveram os mesmos professores?

Se a resposta a essas perguntas é sim, devemos chegar a alguma conclusão. Muitos podem afirmar que o aluno A é melhor porque obteve melhores resultados, conforme a tabela 2 e outros já apostarão no aluno B por ser mais esforçado. Mas, afirmar com exatidão qual deverá ser o aluno indicado para um curso de exatas é impossível. Podemos atribuir probabilidades de que isso realmente venha ocorrer, fazendo previsões e somente com o passar do tempo conseguiremos saber até que ponto nossas previsões estavam corretas. Afinal, no campo da aleatoriedade e da incerteza podemos apenas assumir o papel de um jogador que acredita que a sua previsão será a melhor e, então será o vencedor.

Porém, se o professor dos dois não é o mesmo, novos levantamentos podem ser feitos e é necessária uma nova análise. Pode-se sugerir para a sala que diante desses novos acontecimentos, em grupo, escolha um e somente um dos alunos para cursar Matemática. É um desafio que deverá ser pensado cuidadosamente com cada pergunta que for surgindo.

- As provas apresentavam o mesmo nível de dificuldade?
- O aluno A tem boas notas no começo do ano porque as provas foram mais fáceis e depois sua nota diminuiu porque a matéria ficou mais difícil?
- O professor do aluno A é mais exigente do que o professor do aluno B?
- O professor do aluno B é exigente no primeiro ano porque ainda não conhece a turma e depois que os anos vão passando ele tem coração mole e facilita para os alunos?
- O aluno A pode não gostar muito de matemática, mas é um aluno inteligente, então garante maior nota nos primeiros bimestres. Depois não se dedica muito porque já possui nota suficiente para ser aprovado, sua preferência é pela área de humanas?
- O aluno B adora matemática, mas tem um pouco de dificuldade, porém com incentivo do seu professor consegue melhorar e acreditar em seu potencial a cada ano que passa?
- Será que no decorrer do primeiro ano o aluno B apresentou algum problema familiar ou de saúde e, por esse motivo, não conseguiu dedicar-se tanto assim como no terceiro ano?
- Qual a probabilidade de sucesso no curso de Matemática podemos atribuir para cada um desses alunos diante de cada um desses questionamentos?

Os próprios alunos podem levantar sugestões sobre o que ocorreu de fato com os dois alunos A e B. A discussão mostra que a cada parâmetro adotado a decisão e a escolha do melhor aluno pode mudar. Porém, depois de analisar todos os possíveis acontecimentos cada grupo deverá escolher qual o aluno indicado para estudar Matemática ou área afim, de acordo com os critérios e as informações adotadas .

Esta atividade desafia os alunos a assumir uma postura crítica quando estão diante de informações de cunho estatístico e a começar a entender um pouco de situações que envolvem incertezas e subjetividade. Perceber que a Matemática não é feita somente de cálculos e mais cálculos, às vezes difíceis de serem entendidos faz-se necessário. Esse pode ser um momento de despertar nos alunos o interesse por uma matemática intrigante, questionadora, desafiadora e que também tem espaço para debates e discussões.

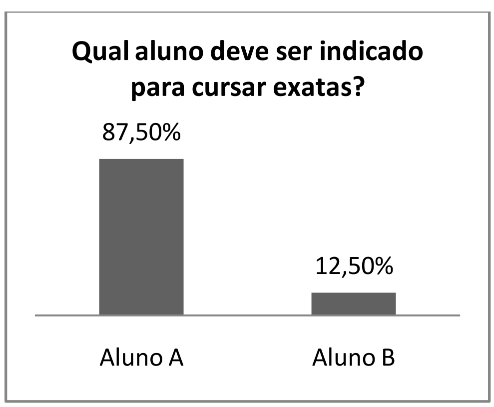
- **Aplicação e conclusão.**

A atividade "As Médias Podem não ser Significativas?" foi realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual João Ribeiro de Carvalho de Conceição dos Ouros. Após recordar medidas de centralidade, já estudadas no 2º ano do ensino médio, e ensinar medidas de dispersão, proposta do 3º ano do ensino médio segundo planejamento da escola.

Na primeira aula, os alunos foram divididos em equipes, cada equipe contendo 4 alunos. Formaram-se 8 equipes na sala de aula. Num primeiro momento receberam o problema informando as notas dos alunos A e B em Matemática no decorrer do Ensino Médio.[10] Foi pedido para que calculassem as medidas de centralidade e as medidas de dispersão das notas dos alunos, comparando-as. Deveriam decidir qual o melhor aluno a ser indicado para um curso de exatas, tendo como base somente os resultados encontrados pelas medidas de centralidade e dispersão. Das 8 equipes, 7 escolheram o aluno A como melhor aluno para um curso de exatas, justificando o menor desvio padrão apresentado em sua nota para a escolha. Apenas uma equipe escolheu o aluno B com a seguinte justificativa.

"*Apesar do aluno A ter menor desvio padrão, a diferença entre os desvios padrão de A e B é muito pequena e o aluno B apresentou melhores notas no terceiro ano. Parece ser um aluno mais esforçado, foi melhorando ao longo dos três anos. Por isso, escolhemos o aluno B".*

Gráfico 17 - Porcentagem da indicação de cada aluno para cursar exatas.



[10] Conforme em 6.2.5.

Para a primeira parte foi necessária uma aula de 45 minutos. Cada equipe apresentou os seus cálculos que foram corrigidos e informou qual a escolha feita.

Na aula seguinte, realizou-se a segunda parte da atividade. Foi entregue para cada equipe algumas das perguntas sugeridas neste trabalho.

- Os alunos estudavam na mesma escola?
- Os alunos tinham o mesmo professor?
- As provas tinham o mesmo nível de dificuldade?

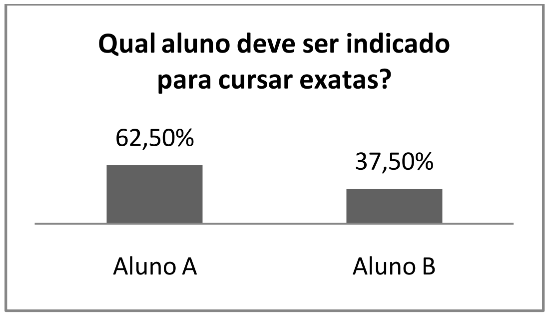
Cada grupo deveria sugerir uma nova pergunta. A cada pergunta analisávamos os dois casos. Depois de uma discussão rica em questionamentos os alunos fizeram novamente a escolha.

Os questionamentos levantados pelas equipes foram:

- Qual era a média da escola?
- Quantas provas foram dadas?
- Nessa escola o aluno era avaliado somente pelas provas?
- O aluno B mudou de escola no terceiro ano do ensino médio?
- O aluno A estudava num curso noturno e, por isso garantia sua nota nos primeiros bimestres?
- As provas no terceiro ano foram mais fáceis do que nos outros anos?
- O aluno B teve ajuda de um professor particular para melhorar seu desempenho?
- O aluno A é inteligente, mas relaxado?

Os alunos perceberam a necessidade das novas informações para que a escolha fosse a mais adequada. Concluíram que diante de situações que envolvem incerteza quanto mais informações tiverem a respeito do ocorrido, maior a chance de acerto em relação à escolha feita. Diante de todos esses questionamentos duas equipes que haviam escolhido o aluno A mudaram de opinião, escolhendo o aluno B como melhor opção. Sendo assim, 5 equipes continuaram apostando no aluno A e 3 equipes no aluno B.

Gráfico 18 - Porcentagem dos alunos indicados para cursar exatas depois das novas informações.



Várias equipes discutiram entre si a escolha. Consideraram que, se os alunos estudassem na mesma escola e tivessem o mesmo professor, o aluno A seria o melhor indicado e não precisariam de muitos questionamentos para chegarem a essa conclusão. Uma das equipes acrescentou, caso esses alunos fossem estudantes da escola João Ribeiro de Carvalho (nossos colegas de classe) apostaríamos no aluno A. Porém, se os alunos não estudassem na mesma escola e não tivessem o mesmo professor, muitos levantamentos deveriam ser considerados e a escolha seria bem mais difícil.

Introduziu-se o conceito de probabilidade subjetiva e sua aplicação. Os alunos acharam muito interessante e comentaram que não imaginavam a matemática sendo aplicada no dia-a-dia dessa forma. Conversamos sobre os conceitos de utilidade e valor esperado.

O exemplo dado para ilustrar melhor a situação envolve a decisão entre carregar ou não o guarda-chuva em um dia onde há probabilidade de chuva. A maioria dos alunos disse que não gosta de carregar o guarda-chuva, ‘a mochila já e muito pesada devido a quantidade de livros, mas dá muita raiva quando termina a aula, está chovendo e temos que ir embora na chuva todo molhado’. Dos 32 alunos, somente 2 alunas têm o costume de carregar diariamente a sombrinha na mochila.

Propomos a resolução de um problema, em conjunto, por toda a sala.

Problema 1. Você liga a TV antes de ir para a escola e escuta o noticiário dizer que há probabilidade de 60% de chuva durante a noite. Você fica em dúvida se leva ou não o guarda-chuva. A mochila está pesada, você está cansado depois de um dia de trabalho e ainda tem que ir pra escola estudar, o que fazer? Levar o guarda-chuva e me prevenir, mesmo sabendo que há 40% de chances de não chover?

Estabelecemos as seguintes alternativas.

- Levar o guarda chuva e chover,
- Levar o guarda chuva e não chover,

-Não levar o guarda-chuva e chover,

-Não levar o guarda-chuva e não chover.

Comentamos sobre cada uma das ações. Alguns alunos disseram ‘dá muita raiva quando não trazemos o guarda-chuva e está chovendo ao terminar a aula’, outros afirmaram ‘eu nunca traga o guarda-chuva, até mesmo porque não tenho, sempre que chove tem um amigo prevenido que me dá carona’. Entre as mulheres, a maioria sempre trazia o guarda-chuva em dias propícios à chuva, os homens geralmente não carregavam o guarda-chuva, uma grande parte deles nem possuía um.

Os alunos deveriam entrar em consenso e atribuir uma valor de utilidade para cada uma dessas ações. Ficou decidido que o valor deveria variar entre -1000 e 1000. Como havia uma diferença de escolha entre homens e mulheres, a sala ficou dividida em dois grupos, um de homens e outro de mulheres. Em conjunto, cada grupo deveria atribuir seus valores de utilidade. Os resultados obtidos estão apresentados nas matrizes de decisão.

Resultado apresentado pelas mulheres.

Tabela 16- Valores de utilidades atribuídos pelas mulheres.

	CARREGAR O GUARDA-CHUVA	**NÃO CARREGAR O GUARDA-CHUVA**
CHOVER (60%)	1000	-1000
NÃO CHOVER (40%)	-200	700

Calculamos o valor da utilidade esperada.

Ação “Carregar o guarda – chuva”.

VE = (0,60)(1000)+ (0,40)(-200) = 600 – 80 = 520.

Ação “ Não carregar o guarda –chuva”.

VE = (0,60)(-1000) + (0,4)(700) = -600 +280 = -320.

Entre as mulheres, a melhor decisão é levar o guarda-chuva.

Resultado apresentado pelos homens.

Tabela 17 - Valores de utilidades atribuídos pelos homens.

	CARREGAR O GUARDA-CHUVA	**NÃO CARREGAR O GUARDA-CHUVA**
CHOVER (60%)	540	-100
NÃO CHOVER (40%)	-1000	850

Calculamos o valor esperado.

Ação “Carregar o guarda – chuva”.

VE = (0,6)(540) + (0,4)(-1000) = 324 – 400 = -76.

Ação “Não carregar o guarda –chuva”.

VE = (0,60)(-100) + (0,4)(850) = -60+ 340 = 280.

Para os homens, a melhor decisão é não levar o guarda-chuva.

A atividade foi bastante proveitosa, os alunos demonstraram muito interesse. Outras situações envolvendo decisão foram discutidas. A maioria dos alunos afirmou pensar que essas situações só poderiam ser aplicadas em empresas ou em ocasiões em que o fator dinheiro estivesse envolvido, como a escolha de um investimento, a compra de um carro ou de uma casa.

A presença da probabilidade em situações de incerteza e sua importância na tomada de decisão foram assimiladas pelos alunos. A atividade abriu espaço para discussão e envolvimento, mesmo os mais tímidos tiveram a oportunidade de participar. Um momento rico de apresentar a matemática de maneira diferente, baseada não somente em fórmulas e conceitos muitas vezes não entendidos, a matemática presente no cotidiano e nas mais diversas situações.

6.3) SORTE OU AZAR ?

No ano de 2008 ao ensinar probabilidade para uma turma de 2º ano de Educação de Jovens e Adultos – EJA , da Escola Estadual “João Ribeiro de Carvalho” de Conceição dos Ouros, MG, percebi a curiosidade alunos em conhecer as chances de vitória nos jogos da mega-sena, lotomania e raspadinha; jogos da Caixa Econômica Federal.

Ao perguntar numa sala de aproximadamente 40 alunos, com faixa etária entre 23 e 45 anos de idade quem tinha o hábito de apostar nesses jogos, a maioria respondeu fazê-los semanalmente ou sempre que ia às casas lotéricas pagar as contas do mês. Entre os homens a preferência era pelo jogo da mega-sena e entre as mulheres a preferência era a raspadinha.

Nessa mesma época, a escola estava realizando uma feira de ciências e matemática com todos os alunos do Ensino Médio e EJA. Cada sala deveria realizar uma atividade para ser apresentada e esta seria julgada por uma equipe de jurados (ex-professores e ex-alunos da escola), com prêmios para o 1º, 2º e 3º lugar.

Como responsável pelo trabalho da turma de 2º ano de EJA, sugeri que fizéssemos a apresentação das probabilidades de se ganhar nesses jogos, pois quando trabalhamos em sala de aula, os alunos tiveram enorme interesse e ficaram assustados com as "pequenas" chances que uma pessoa possui em ganhar os prêmios oferecidos por tais jogos.

Apresentamos o trabalho intitulado "Sorte ou Azar?", onde mostramos os cálculos das probabilidades para a mega-sena, a raspadinha e o jogo comum de bingo com 60 números muito jogado nas festas da cidade. Ficamos em 1º lugar, ganhando até mesmo de alunos jovens de turmas de ensino médio que também apresentaram excelentes trabalhos. Para os alunos da EJA, foi um momento não só de aprendizagem, mas de auto-estima. Eles não acreditavam que haviam conquistado o 1º lugar.

A partir daí, ao ensinar probabilidade nas turmas de 2º ano de ensino médio realizo a atividade de calcular as chances de ganhar nesses jogos. Entre jovens do ensino médio noturno, turmas que leciono, o maior interesse geralmente é pela raspadinha. Farei uma adaptação do trabalho que tenho feito desde 2008, para deixar como sugestão de atividade, com ênfase no jogo da raspadinha.

Raspadinha: Loteria Instantânea promovida por um banco estatal brasileiro. É uma modalidade de loteria na qual se emite uma quantidade de bilhetes, cujos resultados são conhecidos de imediato, ao serem revelados os campos encobertos na área de raspagem do bilhete, onde estão impressas as combinações de números, símbolos ou caracteres determinantes dos prêmios. A loteria instantânea oferece prêmios em espécie ou em bens. Os planos de emissão são submetidos à homologação da secretaria de Acompanhamento Econômico da Fazenda. O plano de emissão, impresso no verso de cada bilhete da Loteria Instantânea, define a quantidade de bilhetes emitidos, valor e quantidade de prêmios oferecidos por faixa de premiação. O produto Loteria Federal Instantânea destina-se a população com 18 anos ou mais.

- **Objetivo:**

1. Calcular a probabilidade de ganhar um prêmio no jogo da raspadinha. Ao mesmo tempo se perguntar: Vale a pena apostar nesse tipo de jogo?

2. Apresentar o conceito de probabilidade relacionando-o com a chance de um evento acontecer. Mostrar que quando falamos de sorte ou azar o que está em jogo são as chances de algo acontecer, ou seja, de um evento ocorrer. E, em jogos de azar, geralmente essas chances existem, mas são pequenas.

3. Apresentar os conceitos de probabilidade subjetiva e teoria da decisão. Levantar o questionamento, vale a pena apostar neste tipo de jogo? Calcular o valor esperado do bilhete.

- **Número de participantes:** Duplas.
- **Duração:** 2 aulas.
- **Desenvolvimento:**

1º momento

Na primeira aula o professor apresenta à turma o vídeo "Coisa de Passarinho" do projeto M_3, matemática multimídia da Unicamp. O vídeo tem duração de 10:23 minutos.

No vídeo um garoto faz as seguintes perguntas.

-Por que o meu pão sempre cai com a manteiga para baixo?

-Por que cai um pé d'água quando eu não levo guarda-chuva?

Os alunos podem se perguntar, por que é tão difícil ganhar um prêmio na raspadinha?

O interessante é o professor discutir com a turma as diferentes abordagens de probabilidade. O assunto sugere a abordagem da probabilidade subjetiva, mesmo que de modo simples e sem cálculos específicos. Mostrar que a intenção da matemática não é prever o futuro, mas apresentar modelos que podem colaborar para descobrirmos o porquê, o como, quantas vezes uma coisa pode acontecer. A matemática não diz que algo vai acontecer, ela apenas informa qual é a chance de que isso ocorra e pode nos ajudar quando temos que decidir ou fazer escolhas diante de situações que exigem de nós uma decisão.

Os seguintes questionamentos podem ser levantados. Quantas vezes por mês vocês costumam jogar na raspadinha? E seus familiares? Se juntarem esse dinheiro ao longo de um ano, qual a quantia acumulararia m?

2º momento

Cada dupla deverá adquirir uma raspadinha. Não é necessário que os alunos comprem uma raspadinha, apesar de eles simpatizarem-se com essa idéia. Sugira que eles possam adquiri-las na casa lotérica, pois as raspadinhas que não são premiadas são descartadas no lixo.

Como existem vários tipos de raspadinhas, de diversas séries e com diferentes prêmios, cada dupla deverá responder às perguntas propostas de acordo com a raspadinha que trouxe[11]. A liberação do uso da calculadora pode ser feita com o objetivo de agilizar o desenvolvimento dos cálculos e não tornar a atividade cansativa e desinteressante para os alunos. Cada dupla deverá apresentar o seu resultado. Pode-se discutir o porquê desses jogos serem chamados pela matemática de jogos de azar e concluir se vale a pena ou não arriscar. É válido salientar que o dinheiro arrecadado com a venda de todos os bilhetes é muito maior que o valor pago em prêmios pela loteria. Afinal, quem sai ganhando?

[11] Encontra-se no apêndice o material para esta atividade.

Modelo de atividade.

ESCOLA ____

ALUNOS: ____

OBS: A raspadinha deverá ser grampeada nessa folha.

ATIVIDADE ENVOLVENDO O CONCEITO DE PROBABILIDADE

SORTE OU AZAR? AS CHANCES DE GANHAR NO JOGO DA RASPADINHA

Número de bilhetes emitidos nessa série: ____________________________________

Valor de cada bilhete: ____

Valor arrecadado com a venda de todos os bilhetes: ___________________________

Preencha a tabela de acordo com os prêmios da raspadinha. As informações encontram-se no verso da raspadinha escolhida. Apresente a probabilidade na forma de fração e porcentagem.

Prêmio	Quantidade de prêmios	Probabilidade

Valor pago em prêmios: ____

“Lucro” = valor arrecadado com a venda de todos os bilhetes - valor pago em prêmios:

____

Chance de ganhar pelo menos um dos prêmios: _____________________________

Chance de não ganhar : ____

Qual a sua opinião sobre os valores encontrados?

Apresentamos um modelo de raspadinha. ___________________________________

Figura 16 - Raspadinha.

Dentre os sete valores impressos sob as áreas raspáveis, incluindo o da área CHANCE EXTRA três valores idênticos indicam o prêmio. Nesta raspadinha, intitulada CAVALO MARINHO os valores obtidos R$ 200,00, R$ 45,00, R$ 12,00, R$ 1,50, R$ 9,00, R$ 1,50 e chance extra de R$ 6,00 não corresponderam a três valores idênticos, logo a mesma não está premiada.

A Loteria informa que o prêmio será pago se o bilhete estiver em qualquer condição que possa obstar a verificação de sua autenticidade.

Apresentamos os cálculos das probabilidades de cada um dos prêmios da raspadinha Cavalo Marinho.

ESCOLA ____

ALUNOS: ____

OBS: A raspadinha deverá ser grampeada nessa folha.

ATIVIDADE ENVOLVENDO O CONCEITO DE PROBABILIDADE

SORTE OU AZAR? AS CHANCES DE GANHAR NO JOGO DA RASPADINHA

Número de bilhetes emitidos nessa série: 2 500000

Valor de cada bilhete: R$ 1,50

Valor arrecadado com a venda de todos os bilhetes: R$ 3750000,00

Preencha a tabela de acordo com os prêmios da raspadinha. As informações encontram-se no verso da raspadinha escolhida.

Prêmio	Quantidade de prêmios	Probabilidade
R$ 85.000,00	2	2/2.500.000 = 0,00008%
R$ 1.000,00	60	60/2.500.000 = 0,0024%
R$ 500,00	100	100/2.500.000= 0,004%
R$ 200,00	300	300/2.500.000 = 0,012%
R$ 45,00	1.600	1.600/2.500.000 =0,064%
R$ 12,00	3.250	3.250/2.500.000 = 0,13%
R$ 9,00	4.500	4.500/2.500.000 =0,18%
R$ 6,00	8.750	8.750/2.500.000=0,35%
R$ 3,00	5.500	53.500/2.500.000=2,14%
R$ 1,50	481.762	481.762/2.500.000=19,27%
Zero reais	1.946.176	1.946.176 / 2.500.000 = 77,84752%

Valor pago em prêmios: R$ 1.427.143,00.

“Lucro” = valor arrecadado com a venda de todos os bilhetes - valor pago em prêmios:

R$ 3.750.000,00 – R$ 1.427.143,00 = R$ 2.322.857,00

Chance de ganhar pelo menos um dos prêmios: 22,15248%.

Chance de não ganhar: 77,84752%.

Qual a sua opinião sobre os valores encontrados?

____

6.3.1) INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES

Os alunos poderão ser informados sobre como a arrecadação dos valores referentes à venda dos bilhetes é distribuída. Conforme normas da loteria federal, a arrecadação é distribuída da seguinte maneira.

Destinação dos Valores Arrecadados	Parcial (Percentual)	Total (Percentual)
Prêmio Total		**45,00%**
Fundo Nacional da Cultura	3,00%	
Comitê Olímpico Brasileiro	1,70%	
Comitê Paralímpico Brasileiro	0,30%	
Prêmio Bruto	**40,00%**	
Imposto de Renda Federal	2,10%	
Prêmio Líquido∗	**37,90%**	
Despesas de custeio e Manutenção de Serviços		**30,00%**
Tarifa de Administração	14,50%	
Comissão CAIXA	1,00%	
Comissão Lotéricos	13,00%	
Fundo de Desenvolvimento das Loterias (FDL)	1,50%	
FIES		**6,60%**
Fundo Penitenciário Nacional		**3,00%**
Seguridade Social		**15,40%**
Renda Bruta		**100,00%**

∗ Prêmio Líquido em média

Juntamente com os alunos o professor pode calcular as porcentagens, transformando os valores em reais. Na Loteria Instantânea apresentada neste trabalho, temos as seguintes distribuições dos valores.

- Fundo Nacional da Cultura = (0,03)(3.750.000,00) = R$ 112.500,00.

- Comitê Olímpico Brasileiro = (0,017)(3.750.000,00) = R$ 63.750,00.

-Comitê Paralímpico Brasileiro = (0,003)(3.750.000,00) = R$ 11.250,00.

- Comissão Caixa = (0,01)(3.750.000,00) = R$ 37.500,00.
- Comissão Lotéricos = (0,13)(3.750.000,00) = R$ 487,500,00.
- Fundo de Desenvolvimento das Loterias = (0,015)(3.750.000,00) = R$ 56.250,00.
- FIES = (0,066)(3.750.000,00) = R$ 247.500,00.
- Fundo Penitenciário Nacional = (0,03)(3.750.000,00) = R$ 112.500,00.
- Seguridade Nacional = (0,154)(3.750.000,00) = R$ 577.500,00.

6.3.2) VALOR ESPERADO PARA O JOGO DA LOTERIA INSTANTÂNEA

No jogo da Loteria Instantânea citado neste trabalho, temos as seguintes probabilidades de ganhar um dos prêmios.

Tabela 18- Probabilidades de cada prêmio do jogo raspadinha.

Prêmio	Quantidade de prêmios	Probabilidade
R$ 85.000,00	2	2 / 2.500.000 = 0,00008%
R$ 1.000,00	60	60 / 2.500.000 = 0,0024%
R$ 500,00	100	100 / 2.500.000= 0,004%
R$ 200,00	300	300 / 2.500.000 = 0,012%
R$ 45,00	1.600	1.600 / 2.500.000 =0,064%
R$ 12,00	3.250	3.250 / 2.500.000 = 0,13%
R$ 9,00	4.500	4.500 / 2.500.000 =0,18%
R$ 6,00	8.750	8.750 / 2.500.000=0,35%
R$ 3,00	53.500	53.500 / 2.500.000=2,14%
R$ 1,50	481.762	481.762/2.500.000=19,27%
Zero reais	1.946.176	1.946.176 / 2.500.000 = 77,84752%

Como o valor do bilhete é R$ 1,50, podemos determinar o valor esperado de cada um dos bilhetes e verificar se desse modo é conveniente ou não apostar nesse jogo. Para o cálculo do valor esperado, devemos considerar a somatória do produto das probabilidades pelos respectivos prêmios.

E(J) = (85.000,00)(0,0000008) + (1.000,00)(0,000024) + (500)(0,00004) + (200)(0,00012) + (45)(0,00064) + (12)(0,0013) + (9)(0,0018) + (6)(0,0035) + (3)(0,021) + (1,50)(0,2) + (0)(77,84752)= 0,5806.

Como o valor pago pelo bilhete é de R$ 1,50 concluímos que o valor esperado R$ 0,5806 não é compensatório. O valor esperado é menor do que o valor pago pelo jogo. Para cada bilhete comprado o jogador estaria perdendo R$ 0,9194.

Se considerarmos o valor esperado em relação ao total de bilhetes teríamos,

2.500.000 bilhetes vendidos a R$ 1,50 = R$ 3.750.000,00

2.500.000 bilhetes com valor esperado de R$ 0,5806 cada = R$ 1.459.000,00

Lucro obtido com a venda de todos os bilhetes: R$ 2.291.000,00.

Este valor está próximo do valor real do lucro obtido com a venda de todos os bilhetes desse jogo, R$ 2.322.857,00. A diferença é de R$ 31.857,00.

6.4) CIÊNCIA FORENSE E PROBABILIDADE

Esta atividade foi desenvolvida por um grupo de alunos do 2º Ano do Ensino Médio do Colégio Santa Ângela da cidade de Paraisópolis, MG, no dia 29 de novembro de 2014, na feira do conhecimento proporcionada pela escola. O tema da feira foi “100 Anos de Descobertas e Conhecimento”. Tema bastante amplo, proporcionava aos alunos liberdade para pesquisa e escolha de um projeto que chamasse a atenção dos visitantes e dos professores. Não havia competição de equipes, os alunos seriam avaliados por professores da escola e a atividade substituía a nota de uma prova do último bimestre.

Uma equipe de 5 alunos me procurou para perguntar sobre o tema escolhido por eles, ciência forense. Aproveitei a ocasião e sugeri que abordassem o tema juntamente com a matemática, usando probabilidade, assunto que eles tinham acabado de aprender. O professor deveria ser apenas um orientador nessa feira, todo o projeto tinha que ser desenvolvido pelos alunos. Sendo assim, apresentei minhas sugestões e todo o resto ficou por conta da equipe.

O projeto ficou interessante e foi muito bem julgado pelos professores que fizeram a avaliação. Os alunos mostraram muito empenho em apresentá-lo e foram elogiados por todos. Apresento aqui como o projeto foi desenvolvido e a conclusão que os alunos obtiveram. É uma dica, para que, qualquer professor de ciência ou matemática possa aproveitá-la e adaptá-la para novas apresentações em feiras proporcionadas pelas escolas.

- **Projeto:** Ciência Forense.
- **Apresentação:** Feira do conhecimento.
- **Número de alunos:** 5 . O número de alunos pode variar. Essa era a quantidade estipulada pela escola para a referida feira.

- **Fonte de pesquisa:** Newsgame: CSI – ciência contra o crime.

Também serviu de apoio para os alunos o vídeo "O Crime da rua do gasômetro" do programa matemática multimídia da Unicamp.

- **Objetivo:** Desvendar um crime . Num primeiro momento, analisando a cena do crime tentar descobrir o que de fato ocorreu. A partir de novas informações da perícia, verificar se a opinião continua a mesma ou foi alterada devido às novas informações. Calcular o número de pessoas que permaneceram com a mesma opinião e aquelas que mudaram de ideia. Inserir conceitos de probabilidade subjetiva e teoria da decisão. Ao analisar as ações e através de novas informações decidir da melhor maneira diante de uma situação que envolva incerteza.

- **Desenvolvimento:** O trabalho foi apresentado em uma sala de aula. A porta da sala ficava fechada durante as apresentações. Os novos visitantes deviam aguardar em fila para assistirem à próxima apresentação. Cada apresentação era feita para no máximo 10 pessoas, número que ficava adequado ao espaço físico da sala de aula onde o projeto foi apresentado.

Material usado pelos alunos para realização do trabalho. As Figuras 17 a 21 mostram, respectivamente, os cartazes, Ciência forense, perícia, esqueleto, TV e computador e as cenas do crime.

✓ Cartazes.

Figura 17- Cartaz Ciência Forense.

Figura 18 - Cartaz perícia.

✓ Esqueleto.

Figura 19 - Cartaz esqueleto.

✓ TV e computador.

Figura 20 - TV e computador.

✓ Cenas do crime.

Figura 21 - Cenas do crime.

Os alunos deram início à apresentação explicando o que é ciência forense, qual a sua função, quais os meios utilizados por ela para desvendar um crime, as tecnologias adotadas pela ciência forense.
- IBIS: Sistema Integrado de Identidade Balística. Tecnologia canadense que transforma as impressões da bala em equações que podem ser analisadas em computador e guardadas em um banco de dados.

- DNA: O DNA é a estrutura que identifica os seres vivos e apresenta características próprias que permite, mesmo em indivíduos de uma mesma espécie, diferenciá-los. Assim, pessoas de uma mesma família, apresentam diferenças físicas determinadas pela variação do DNA presente em cada indivíduo. O DNA é muito útil para desvendar crimes e determinar paternidade, bem como diagnosticar doenças.

Para isso usavam slides com a ajuda do computador e da tela de TV.

Logo depois levavam os visitantes para a "cena do crime". Uma aluna fazia o papel da vítima e um dos alunos contava o ocorrido.

"Uma juíza, residente no interior de São Paulo, de 52 anos é encontrada morta na sala de sua casa com um tiro no peito, pelo estagiário que trabalhava com ela. O estagiário disse ter ido visitar a juíza e, quando percebeu que não havia ninguém, mas a janela da sala estava aberta, resolveu entrar e deparou-se com a cena. Avisou a polícia por volta das 22h15. Após medir a temperatura do corpo, um perito estimou a hora da morte entre 19h e 22h. A cena sugere que ela se matou. A vítima foi encontrada sentada na poltrona da sala, de pijama, com um tiro no peito e revólver na mão. Não há sinais de roubo. Moradores da vizinhança disseram que a juíza não simpatizava com um dos vizinhos, devido às festas barulhentas que ele fazia. O tal vizinho não foi encontrado. Há comentários de que a juíza tinha um caso com o estagiário. A juíza tem uma filha que estuda e mora em São Paulo e pouco visita a mãe. Há também o caseiro, pessoa que mais tinha contato com a juíza."

O aluno pedia para que as pessoas se colocassem no papel da perícia, analisassem o local e dessem opinião sobre quais objetos podiam servir para desvendar o crime. Depois de ouvirem as opiniões, outra aluna, fazendo o papel de perita criminal, mostrava quais eram os objetos que seriam recolhidos por ela para serem analisados. Geralmente os visitantes acertavam vários deles.

Cigarro: havia dois tocos de cigarro e um com marca de batom, sinal de que uma mulher tinha fumado. A juíza era fumante? Tinham que descobrir. Segundo o estagiário a juíza nunca fumou perto dele.

Garrafa de vinho: A garrafa de vinho estava sobre a mesa e fechada. Havia uma taça ao lado da garrafa com um resto de vinho. Será que a bebida continha veneno? A juíza pode ter sido envenenada antes de ser morta?

Revólver: o revólver era da juíza e estava colocado em sua mão. Como continuou na mão da juíza após ela ter morrido?

Migalhas de pão no tapete: as migalhas também deveriam ser recolhidas. A juíza estava alimentando-se quando sofreu o atentado? A migalha estaria envenenada?

Mala da juíza: pode conter informações importantes.

Agenda: a agenda estava caída no chão. Pode conter algum segredo?

Celular: o celular da juíza estava desligado. O estagiário disse ter recebido um SMS da juíza por volta das 21h15 com os dizeres "Preciso te ver agora", por isso foi até à casa da juíza.

Marca do tiro: Havia pouco sangue no local, isso indica que o tiro pode ter sido dado depois da juíza já estar morta. O tiro foi dado de cima para baixo. O que isso quer dizer? Será que a arma usada é a mesma que se encontra na mão da juíza?

Vômito na roupa da juíza: a camiseta da juíza tinha sinal de vômito.

Depois de recolher os objetos, uma quarta aluna fazendo o papel de investigadora do caso, relatava os depoimentos dos suspeitos.

Filha: A filha disse que estava em São Paulo arrumando o apartamento em que mora. Não há ninguém para comprovar que ela realmente estava lá naquele momento, pois mora sozinha. Ela parece não gostar do estagiário, deixou isso bem claro. Também não tinha um bom relacionamento com a mãe. Disse que a mãe tinha "gênio forte" e era uma pessoa de difícil convivência.

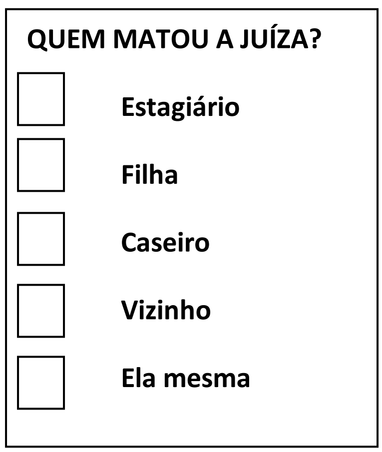
Estagiário: Disse estar na faculdade quando recebeu o SMS da juíza. Câmeras de segurança do local realmente afirmaram que ele estava lá no momento do crime. Ele afirmou ter tido um caso com a juíza, mas romperam há algumas semanas e continuaram amigos, já que ele trabalhava com ela. Resolveu ir à casa da juíza por ter muito carinho por ela e ficar preocupado com a mensagem que havia recebido.

Vizinho barulhento: Não foi encontrado. Segundo familiares ele está viajando para a Espanha e de lá iria para Portugal. Só voltará daqui duas semanas.

Caseiro: O caseiro disse que costumava frequentar um bar nesse horário e que a juíza permitia que ele saísse pelo menos uma vez por semana. No dia do crime estava nesse bar e permaneceu por lá até 1h. Fato confirmado pelo dono do bar, mas que não serve como álibi, por ser muito amigo do caseiro. O caseiro também revelou que havia acabado de pedir demissão depois de anos trabalhando para a juíza. O motivo é porque queria voltar para sua terra natal.

Depois dos depoimentos e dos objetos que foram levados para a perícia, cada visitante foi convidado a dar sua opinião sobre quem havia cometido o crime. Receberam para isso, um papel como o do modelo, Figura 22.

Figura 22 - Quem matou a juíza?



Depois de dar a sugestão, o visitante era convidado a colocar esse papel dentro de uma caixa onde estava escrito número 1. Das 40 pessoas que votaram, foram obtidos os seguintes resultados.

Estagiário: 12 pessoas.

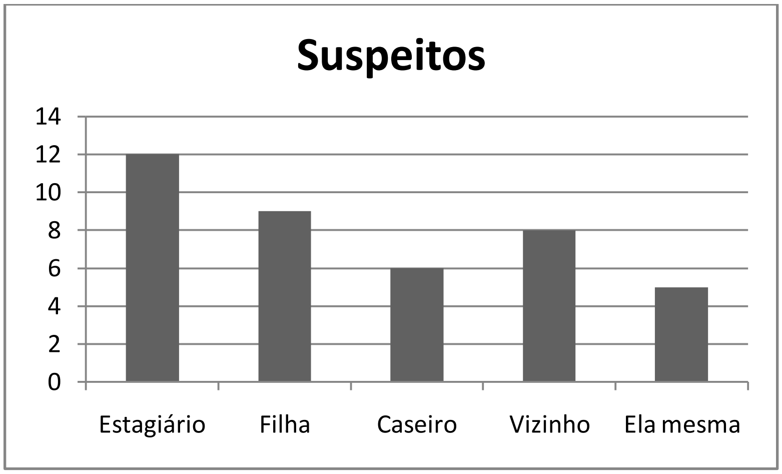
Filha : 9 pessoas.

Caseiro: 6 pessoas.

Vizinho: 8 pessoas.

Suicídio: 5 pessoas.

Gráfico 19 - Suspeitos.



A maioria das pessoas opinou por suspeitar do estagiário devido ao caso amoroso que havia entre eles. Os alunos relataram que os visitantes depois de votarem, ficavam ansiosos para descobrir o que de fato ocorreu.

Após terem dado o seu voto, os participantes eram conduzidos para a mesa da perícia, onde uma aluna relatava o que de fato foi encontrado nos objetos.

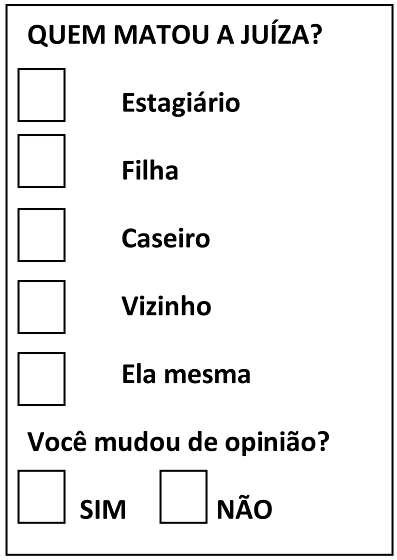
Figura 23- Mesa da perícia.

- Na maleta da juíza foi encontrada uma apólice de seguro no valor de R$ 2.000.000,00. Porém, estava em destaque na apólice que não havia cobertura em caso de suicídio premeditado. A única beneficiária desse seguro era a filha da juíza.
- Na agenda foram encontrados papéis picados que ao serem juntados revelaram uma receita de pão recheado de chocolate. Porém não se tinha o conhecimento da caligrafia da receita.

- O cachorro da juíza foi encontrado morto em seu quintal. Ele foi envenenado por uma substância conhecida como sulfato de nicotina, uma substância usada para matar pulgões e outras pragas.
- Vasculhando a casa da juíza e a casa onde o caseiro morava foi encontrada uma garrafa de inseticida com a substância encontrada no corpo do cachorro.
- Foram recolhidas duas amostras de DNA diferentes no toco de cigarro encontrado na mesa. Sabe-se que alguém esteve com a juíza.
- Havia fibra de algodão na rolha da garrafa de vinho encontrada sobre a mesa. Segundo análise essas fibras parecem ser de luva de jardinagem.
- A única impressão digital encontrada na arma do crime é da vítima. A bala que atingiu à juíza é do revólver que a mesma segurava.
- Testes de DNA comprovam que a saliva encontrada no copo de vinho era da juíza.
- No fundo da casa da juíza foi encontrado, caída no chão um par de luvas de jardinagem cujas fibras coincidem com a fibra encontrada na garrafa de vinho.
- A mensagem foi enviada para o estagiário do celular da vítima às 21h. Nesse aparelho foram encontradas somente as digitais da vítima. Suspeita-se que o SMS pode ter sido enviado por outra pessoa, depois da morte da juíza.
- A roupa da juíza realmente estava suja de vômito. Análise do tapete também comprovou que havia vômito.
- As migalhas de pão encontradas caídas no tapete continham sulfato de nicotina, a mesma substância encontrada no corpo do cachorro morto.
- Na garrafa de vinho não foram encontrados vestígios de veneno.
- Suspeita-se que a juíza foi envenenada com o pão e a morte foi causada pelo envenenamento e não pelo tiro.

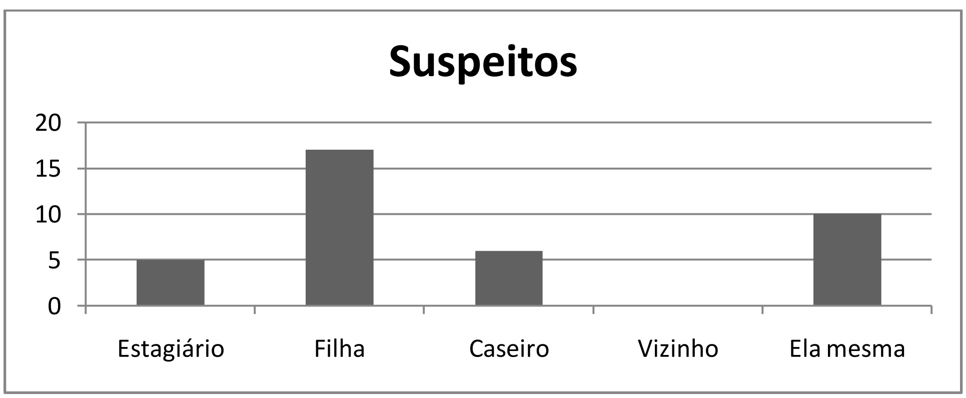
Depois de receber as informações, os visitantes foram convidados a assumirem o papel de investigadores e novamente votar. O voto, Figura 24 era colocado na urna com número 2.

Figura 24 - Quem matou a juíza? Você mudou de opinião?



Os resultados obtidos estão mostrados no Gráfico 20.

Gráfico 20 - Suspeitos depois das novas informações.



Os alunos perceberam que a maioria dos visitantes mudaram de opinião. Das 40 pessoas que votaram, 18 mantiveram suas opiniões e 22 mudaram de opinião.

Mudaram de opinião**:** $\mathbf{\frac{22}{40} = 0,55 = 55\%.}$

Mantiveram sua opinião: $\mathbf{\frac{18}{40} = 0,45 = 45\%.}$

Após coletar os dados das 40 pessoas que assistiram as apresentações e realizar os devidos cálculos, os alunos continuaram as apresentações, porém, sem votações. Somente com comentários dos valores obtidos. Os alunos salientaram a ligação que a matemática tem com a ciência forense. Pode-se usar probabilidade para se desvendar um crime, a partir de novas informações obtidas, passa-se a ter maior convicção do que de fato ocorreu e é possível quantificar essa possibilidade. Como as suspeitas do vizinho foram poucas, ninguém mais acreditou que ele pudesse ser o criminoso, enquanto que as suspeitas recaíram sobre a filha e o caseiro.

Os alunos solicitaram aos visitantes que comentassem o que eles achavam que realmente aconteceu com a juíza. Os que votaram na filha acreditavam que ela estava interessada no seguro e, por esse motivo, matou a mãe. Os que votaram no caseiro sugeriram que ele pudesse ser apaixonado pela juíza e devido ao envolvimento da mesma com o estagiário, por ciúme, resolveu se vingar e matou-a. Outros achavam que a juíza era uma patroa má e cruel e, despertou a ira no empregado, que por não aguentar insultos e humilhações resolveu envenená-la. Para os que afirmaram que a juíza havia cometido suicídio,o fato de descobrir o que a filha seria capaz de fazer gerou depressão e angústia e, devido a isso, cometera o suicídio, o que deixaria a filha sem o seguro que tanto almejava. Os motivos foram vários, cada um tinha o seu argumento. Portanto, a curiosidade era comum a todos os visitantes em descobrir o que de fato ocorreu.

Para encerrar um aluno relatou o que realmente aconteceu no dia do crime.

"*Pouco antes de terminar o relacionamento com o estagiário, a juíza descobriu que a filha estava planejando matá-la para ficar com o seguro de vida. As duas nunca se deram muito bem. A filha sempre acusava a mãe de querer só trabalhar e não ter tempo para ela. A mãe ficava preocupada com as amizades da filha.*

A filha tentou comprar o caseiro para fazer o serviço. Porém, o caseiro, como fiel empregado e, por gostar muito da juíza, não aceitou de jeito algum. Não ficou indignado com a proposta porque conhecia a índole da filha da juíza. Porém, não teve dúvidas de que deveria contar isso à sua patroa e o fez. Também pediu demissão após fazer o relato, com medo de que a situação podia se complicar para ele.

*Perturbada, a juíza enviou um e-mail para um amigo do fórum, que serviria como evidência caso sua filha resolvesse matá-la: '**M**eu amigo, peço que guarde esse e-mail como prova de **A**mizade. **T**antasvezes pude contar com um amigo tão fiel, **R**esponsável e **I**nteligente, temo que não encontre outro igual a você. Isso me amedronta e aterroriza. **C**onsideravelmente não sei o quê fazer. **I**magino que devo tomar alguma providência.Como você está de saída, **I**magino que seja boa hora **D**izer **I**sso. **O**brigada por tudo. '*

*Juntando as letras que estavam em negrito no e-mail encontramos a palavra **MATRICIDIO**, ato de matar a própria mãe.*

Estando abalada com a descoberta de que a filha seria capaz de tal ato e, devido à desilução amorosa que acabara de sofrer por causa do término do relacionamento com seu estagiário, a juíza resolveu suicidar-se. Somente desse modo sua filha não receberia o seguro milionário. A juíza assou os pães colocando neles o inseticida e depois ingeriu-os. Resolveu fumar, vício que já havia largado há algum tempo, tomou uma dose de vinho, sua bebida preferida. O veneno deixou-a desacordada e provocou vômitos. Pouco depois a filha chegou na casa da juíza e deparou-se com a cena (a juíza já sabia da visita da filha). Ao lado do corpo havia um bilhete em que a juíza deixava bem claro para a filha que ela não conseguiria receber o tão sonhado seguro. Desesperada, a filha decidiu armar um assassinato, atirando na mãe, mesmo depois de morta para tentar enganar a polícia e a seguradora. Usando as luvas do jardineiro, ela pegou a arma da mãe e atirou. Em seguida, enviou a mensagem de texto, do celular da mãe, para o estagiário. Queria que ele chegasse na casa, encontrasse a juíza morta e tornasse o principal suspeito do crime. A filha jogou os pães na lixeira e esqueceu de tampá-la. O cachorro, mexendo na lixeira, ingeriu os pães e por esse motivo também morreu envenenado. A filha colocou a arma na mão da mãe para tentar confundir os policiais. Seu maior erro foi mentir que não esteve na casa da mãe naquele dia, o exame de dna comprovou que um dos cigarros tinha sido fumado por ela. Ao ser investigada e sofrer interrogatório, a filha não resistiu a pressão e confessou o que havia feito, entregando à polícia o bilhete na qual a mãe afirmava ter suicidado."

Apenas 10 visitantes acertaram o que ocorreu, ou seja, 25 % deles. A maioria, 47,5% acreditava ser a filha a culpada do crime. Realmente, a filha também teve parte de culpa no crime.

Ao terminar a explanação sobre o que ocorreu no dia do crime, um aluno explicou sobre probabilidade, de maneira simples para que todos entendessem. Relatou a aplicação da probabilidade subjetiva em situações como essa ou até mesmo em situações do dia-a-dia, como por exemplo, ao vir participar da feira você fez essa escolha ao invés de outra, você decidiu o melhor horário para a visita. Tomamos decisões a todo momento e às vezes elas são tão comuns que passas despercebidas.

A cada informação nova, ou a cada exame de dna, a probabilidade de alguém ser o culpado pode variar e assim, através de mais informações consegue-se chegar ao que de fato aconteceu.

CONCLUSÃO.

Percebemos ao final da contagem dos suspeitos escolhidos pelos participantes da feira, que a votação deveria ter sido feita em um único modelo[12]. Assim, conseguiríamos saber com exatidão quem mudou de ideia e para qual suspeito a mudança foi feita. Realizando a votação em dois momentos, só conseguimos obter o percentual das pessoas que mudaram de opinião. Alguns participantes comentavam para qual suspeito mudaram, mas não conseguimos obter com exatidão para qual suspeito a mudança foi feita.

6.5.) QUAL A MELHOR DECISÃO?

O assunto probabilidade nem sempre é trabalhado em sala de aula de modo a levar os alunos a entenderem de fato o tema. Geralmente os livros didáticos e apostilas abordam apenas a probabilidade clássica.

Esta atividade, baseada no livro "Análise Estatística da Decisão" de Bekman e Costa Neto, O Caso do jogo de futebol, pág. 29, apresenta probabilidade subjetiva [1] e teoria da decisão. Como probabilidade subjetiva não é um tema que faz parte do currículo do ensino médio, nada impede que o professor desenvolva-a com seus alunos, já que o tópico trabalhado em sala de aula é probabilidade. O professor pode apresentá-la de forma simples e clara, levando o aluno a uma melhor concepção sobre probabilidade e à percepção de que ela está presente em vários fatos do dia-a-dia.

- **Objetivo:** Explicar o conceito de probabilidade subjetiva e teoria da decisão, levando os alunos a tomarem a melhor decisão diante de uma situação de incerteza.

- **Número de alunos:** Pode variar entre 4 a 6 alunos por equipe.

- **Série:** Pode ser aplicada em turmas de 2º ano do ensino médio, logo após o estudo de probabilidade, ou em turmas de 3º ano ao se fazer a revisão de probabilidades para o enem e vestibulares.

[12] Segue modelo de votação único no Apêndice.

- **Número de aulas:** 2 ou 3.

- **Desenvolvimento:**

1º momento: O professor pode utilizar o problema dos *cupcakes*, citado neste trabalho, para introduzir os conceitos de probabilidade subjetiva, critérios de decisão, árvore de decisão e utilidade ou simplesmente utilizá-lo para entender melhor o assunto e poder explanar essas ideias e conceitos para os alunos em sala de aula. O vídeo Brasil x Argentina do projeto m3 da Unicamp ajuda a entender o processo de decisão. A duração do vídeo é de apenas 11:04 minutos, o vídeo pode ser utilizado até mesmo antes da explanação do problema dos *cupcakes.*

2º momento: Sugerir que os alunos utilizem probabilidade subjetiva e valores de utilidade para resolver o problema proposto e encontrar a decisão que maximize a escolha. Os valores monetários podem ser negativos ou positivos, mas devem ser coerentes com a satisfação da equipe de acordo com cada ação. A probabilidade de chuva ou sol deve apresentar uma justificativa para o valor escolhido.

Problema 2. Uma turma de alunos, da qual você faz parte, vai fazer uma viagem de formatura. Para isso possuem três destinos diferentes, viajar para a praia, viajar para um hotel fazenda ou alugar uma casa de campo com piscina na própria cidade. Os alunos farão essa viagem na segunda semana de janeiro, data em que todos podem participar. Segundo as suas pesquisa há ____% de probabilidade de chuva durante essa semana. Somente uma das viagens deve ser escolhida.

Constatamos que a probabilidade de chuva é de ____% baseando-nos em: ____

Deve-se levar em conta que,

A_1 Viajar para a praia

O dinheiro da comissão de formatura é suficiente para pagar a locomoção e o aluguel da casa de praia por três dias, tempo suficiente para que haja diversão. Em princípio, essa era a ideia da turma toda. Porém, com a previsão de que há ___% de chance de chuva contra ____% de sol, alguns alunos estão preocupados caso esses três dias sejam chuvosos. Com chuva na praia não há muito o que se fazer, não dá pra curtir o mar e ficar bronzeado. O único jeito seria ficar na casa jogando baralho ou um jogo de tabuleiro. Parece que nesse caso a viagem não será interessante.

A_2 Viajar para um hotel fazenda

Dizem que é muito pacato e silencioso curtir um final de semana num hotel fazenda. O dinheiro é suficiente para manter as despesas por um final de semana. O hotel tem piscina com toboágua, o que anima vários alunos. Alguns até preferem piscina do que mar. Caso chova não seria tão ruim assim. O hotel tem uma equipe de monitores excelente que promove brincadeiras, baladas e recreações, caso chova.

A_3 Alugar uma casa de campo

Como o translado é bem menor, já que a casa de campo é na própria cidade dos alunos, o dinheiro é suficiente para que possam curtir mais dias do que na praia e no hotel. Dá até pra pagar uma cozinheira para fazer o almoço, e assim eles possam se divertir mais. Não tem muita coisa diferente, só há uma piscina. Durante à noite seria um pouco monótono. Porém, caso chova o proprietário devolve o dinheiro ou marca para uma nova data, com dia propício a sol, já que o proprietário é amigo de alguns alunos.

Qual a melhor decisão a ser tomada?

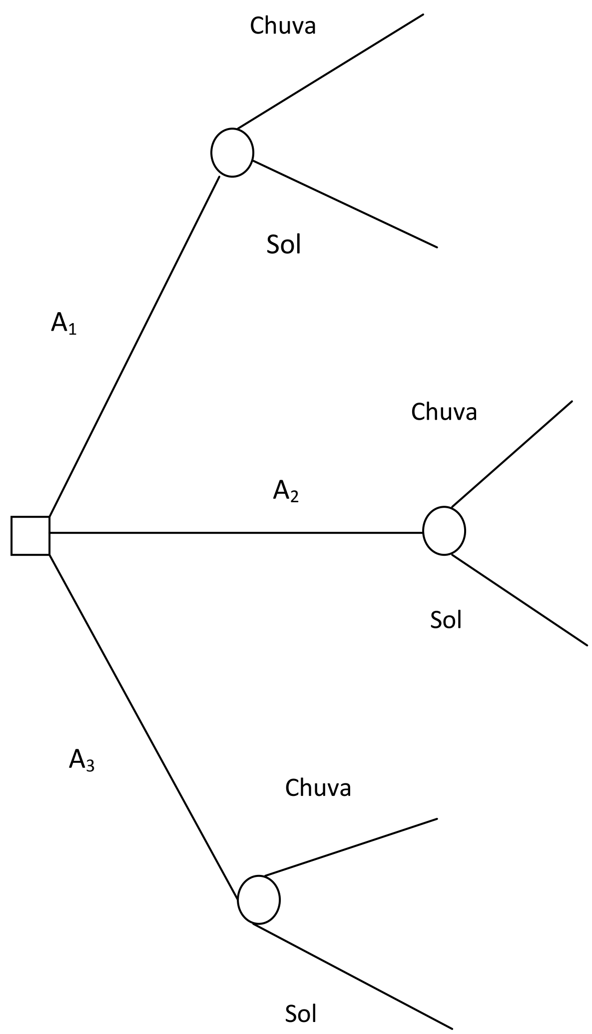
Depois de propor o problema para os alunos o professor pode entregar este modelo de tabela, Tabela 19 para que os alunos preencham com escala monetária (utilidade) de acordo com suas preferências.

Tabela 19- Tabela das preferências.

Ação / Natureza	A_1 = praia	A_2 = hotel fazenda	A_3 = casa de campo
CHUVA (p=___)			
SOL(p=___)			

Após colocarem os valores de utilidade, deverão realizar o cálculo do valor esperado para cada ação e depois completarem a árvore de decisão, conforme Figura 25.

Figura 25- Árvore da decisão.



Qual a melhor decisão a ser tomada, analisando os resultados?

Cada grupo deve expor sua escala de utilidade e comentá-la. O professor pode aproveitar o momento e verificar se as escalas apresentadas por cada grupo foram parecidas ou muito diferentes. Ao final, deve-se verificar qual a ação escolhida pela maioria dos grupos.

- **Aplicação e conclusão.**

A atividade "Qual a Melhor Decisão?" foi aplicada em uma turma de 3º ano do ensino médio da Escola Estadual "João Ribeiro de Carvalho" de Conceição dos Ouros. Foi escolhida para desenvolver a atividade a mesma turma que já havia trabalhado com a atividade "As médias podem não ser significativas?" .

A sala já conhecia probabilidade subjetiva e teoria da decisão ao resolver o problema do guarda-chuva. Num primeiro momento recordamos alguns conceitos através do problema dos *cupcakes* apresentado neste trabalho. Foi necessária uma aula para a explicação do problema dos *cupcakes* e assistirmos o vídeo Brasil x Argentina.

Na aula seguinte os alunos foram distribuídos em equipes. Formaram-se 6 equipes, 4 equipes de 6 alunos e 1 equipe de 5 alunos cada. Foi entregue para cada grupo o problema da viagem com as suas ações, a tabela para colocarem o valor da utilidade de acordo com as preferências do grupo e a árvore de decisão. A atividade foi avaliada como trabalho.

As respostas para a atividade.

GRUPO 1.

65% de probabilidade de chuva e 35% de probabilidade de sol.

Justificativa. Janeiro é um mês propício à chuva. Na região litorânea que frequentamos sempre chove nas primeiras semanas de janeiro. Na nossa região chove menos.

Tabela 20 - Tabela das preferências do grupo 1.

Ação / Natureza	A_1 = praia	A_2 = hotel fazenda	A_3 = casa de campo
CHUVA (p=0,65)	5	85	2
SOL (p=0,35)	200	150	50

Valor da utilidade esperada para cada ação.

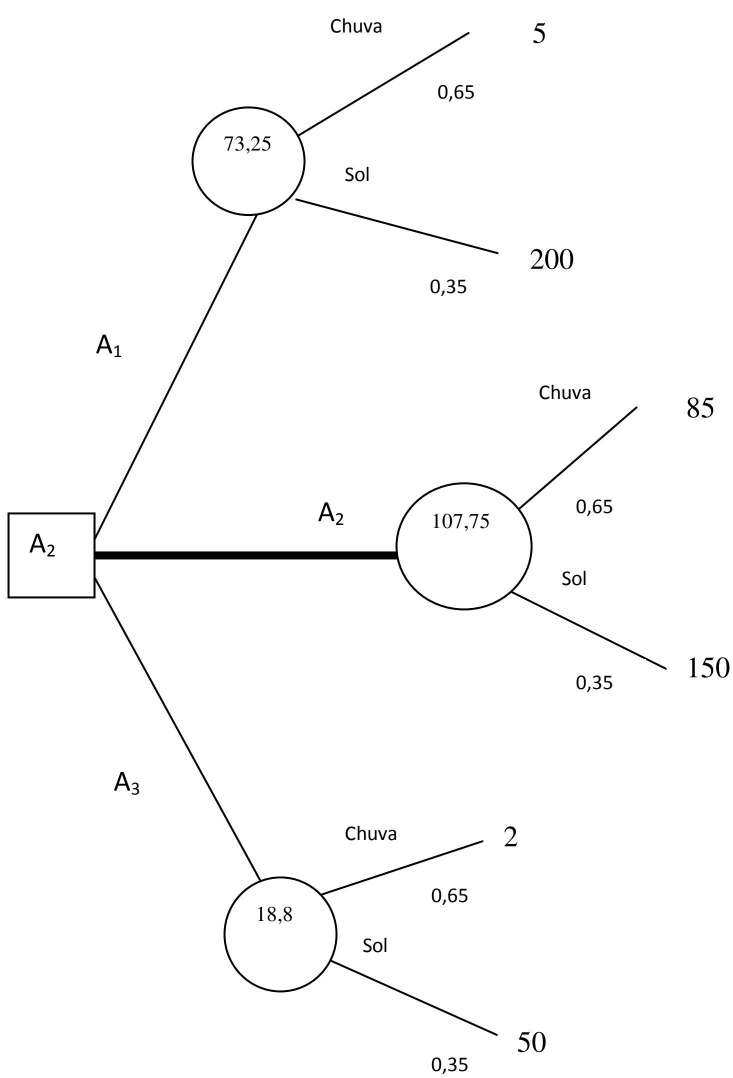
$A_1 = (5)(0,65) + (200)(0,35) = 73,25$.

$A_2 = (85)(0,65) + (150)(0,35) = 107,75$.

$A_3 = (2)(0,65) + (50)(0,35) = 18,8$.

A melhor decisão para o grupo 1 é viajar para o hotel fazenda.

Figura 26- Árvore da decisão do grupo 1.



GRUPO 2.

60% de probabilidade de chuva e 40% de probabilidade de sol.

Justificativa. Janeiro é um mês chuvoso. Na região litorânea chove nessa época do ano. As reportagens sempre mostram deslizamentos de terra e catástrofes em regiões litorâneas nessa época do ano.

Tabela 21- Tabela das preferências do grupo 2.

Ação / Natureza	A_1 = praia	A_2 = hotel fazenda	A_3 = casa de campo
CHUVA (p=0,60)	1	150	50
SOL (p=0,40)	250	290	200

Valor esperado para cada ação.

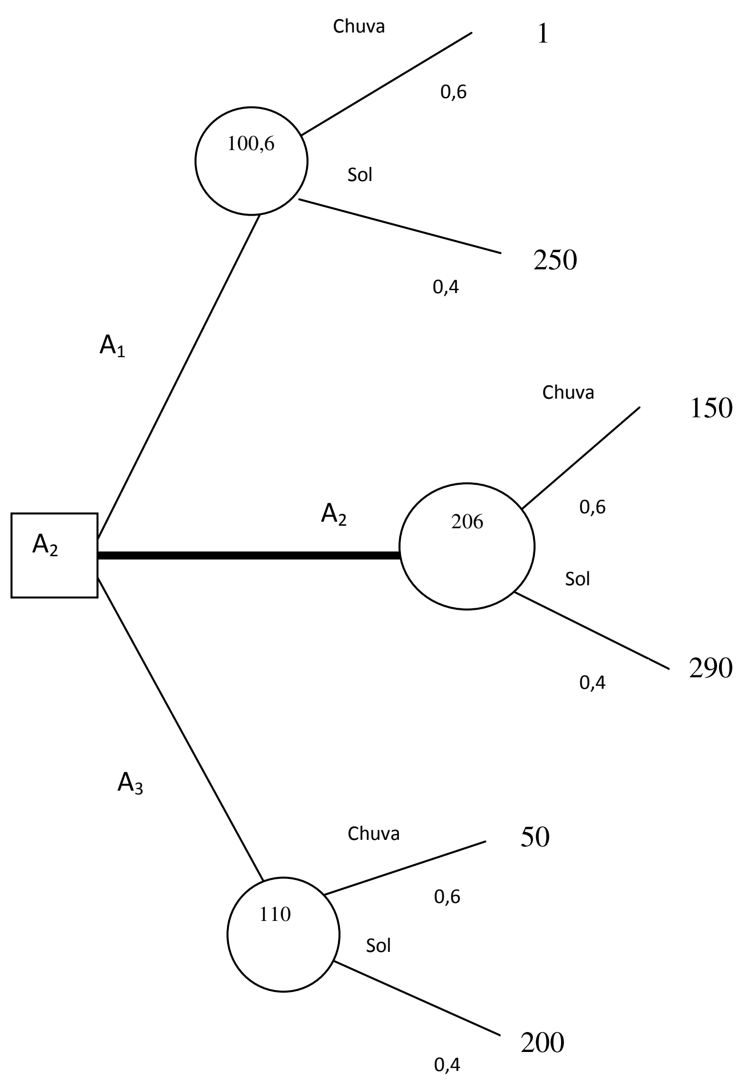
$A_1 = (1)(0,60) + (250)(0,40) = 100,6.$

$A_2 = (150)(0,60) + (290)(0,40) = 206.$

$A_3 = (50)(0,60) + (200)(0,40) = 110.$

A melhor decisão para o grupo 2 é viajar para o hotel fazenda.

Figura 27 - Árvore da decisão do grupo 2.



GRUPO 3.

60% de probabilidade de chuva e 40% de probabilidade de sol.

Justificativa. As primeiras semanas de janeiro são chuvosas.

Tabela 22- Tabela das preferências do grupo 3.

Natureza \ Ação	A_1 = praia	A_2 = hotel fazenda	A_3 = casa de campo
CHUVA (p=0,60)	-580	400	550
SOL (p=0,40)	490	600	650

Valor esperado para cada ação.

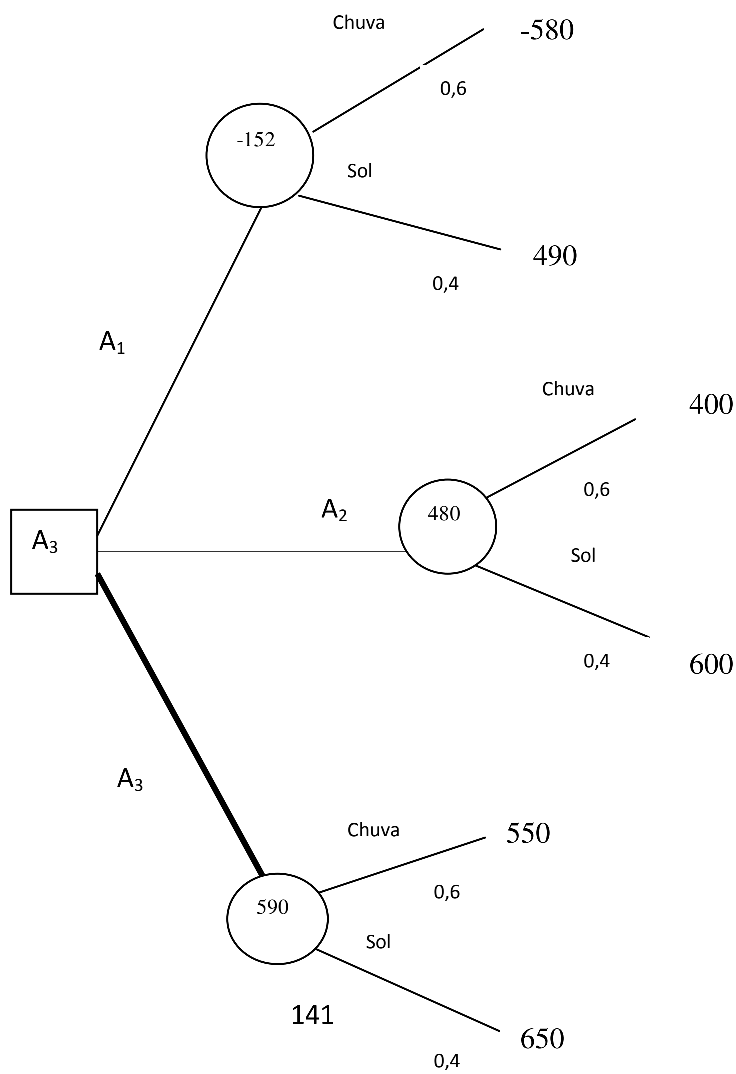
$A_1 = (-580)(0{,}60) + (490)(0{,}40) = -152$

$A_2 = (400)(0{,}60) + (600)(0{,}40) = 480$

$A_3 = (550)(0{,}60) + (650)(0{,}40) = 590$

A melhor decisão para o grupo 3 é viajar para a casa de campo. Dos 4 integrantes desse grupo, três eram simpatizantes de cavalgadas e rodeios e moram na zona rural. Os valores de utilidade atribuídos por eles são coerentes ao perfil da maioria do grupo.

Figura 28 - Árvore da decisão do grupo 3.



141

GRUPO 4.

70% de probabilidade de chuva e 30% de probabilidade de sol.

Justificativa. Como não temos muita sorte, a probabilidade de chuva será maior.

Tabela 23- Tabela das preferências do grupo 4.

Ação / Natureza	A_1 = praia	A_2 = hotel fazenda	A_3 = casa de campo
CHUVA (p=0,70)	0	700	200
SOL (p=0,30)	700	900	500

Valor esperado para cada ação.

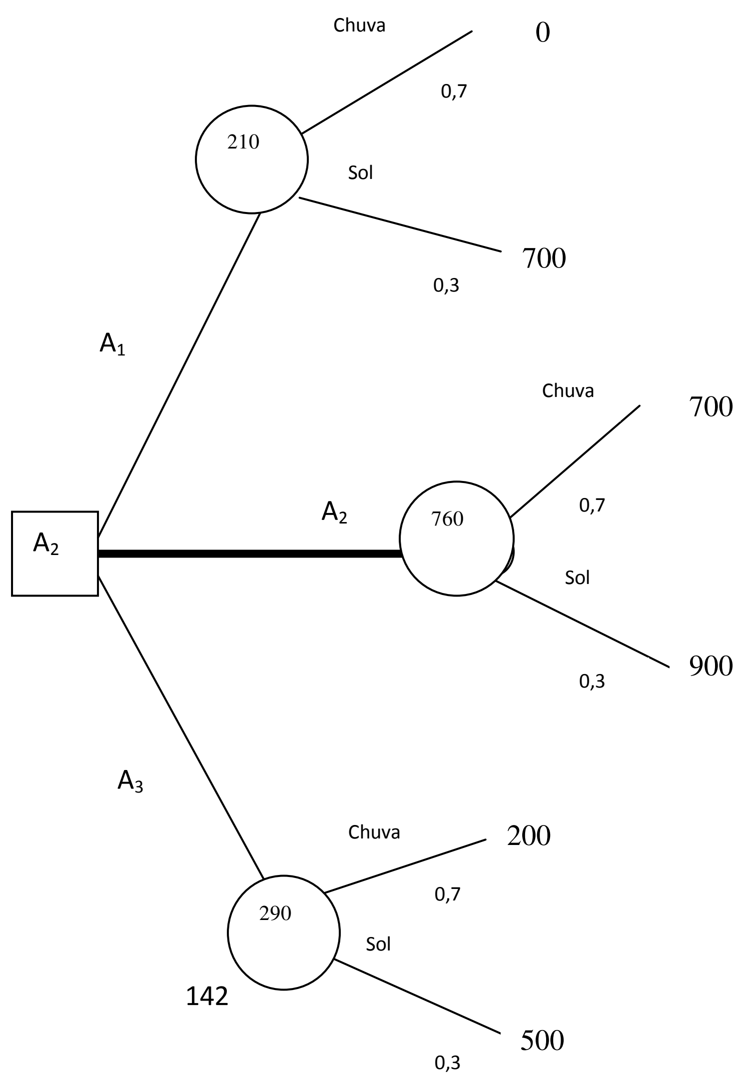
$A_1 = (0)(0,70) + (700)(0,30) = 210.$

$A_2 = (700)(0,70) + (900)(0,30) = 760.$

$A_3 = (200)(0,70) + (500)(0,30) = 290.$

A melhor decisão para o grupo 4 é viajar para o hotel fazenda.

Figura 30 - Árvore da decisão do grupo 4.



GRUPO 5.

10% de probabilidade de chuva e 90% de probabilidade de sol.

Justificativa. Nos anos de 2014 e 2015 o mês de janeiro não foi chuvoso.

Tabela 24 - Tabela das preferências do grupo 5.

Ação / Natureza	A_1 = praia	A_2 = hotel fazenda	A_3 = casa de campo
CHUVA (p=0,10)	500	500	50
SOL (p=0,90)	1500	1700	100

Valor esperado para cada ação.

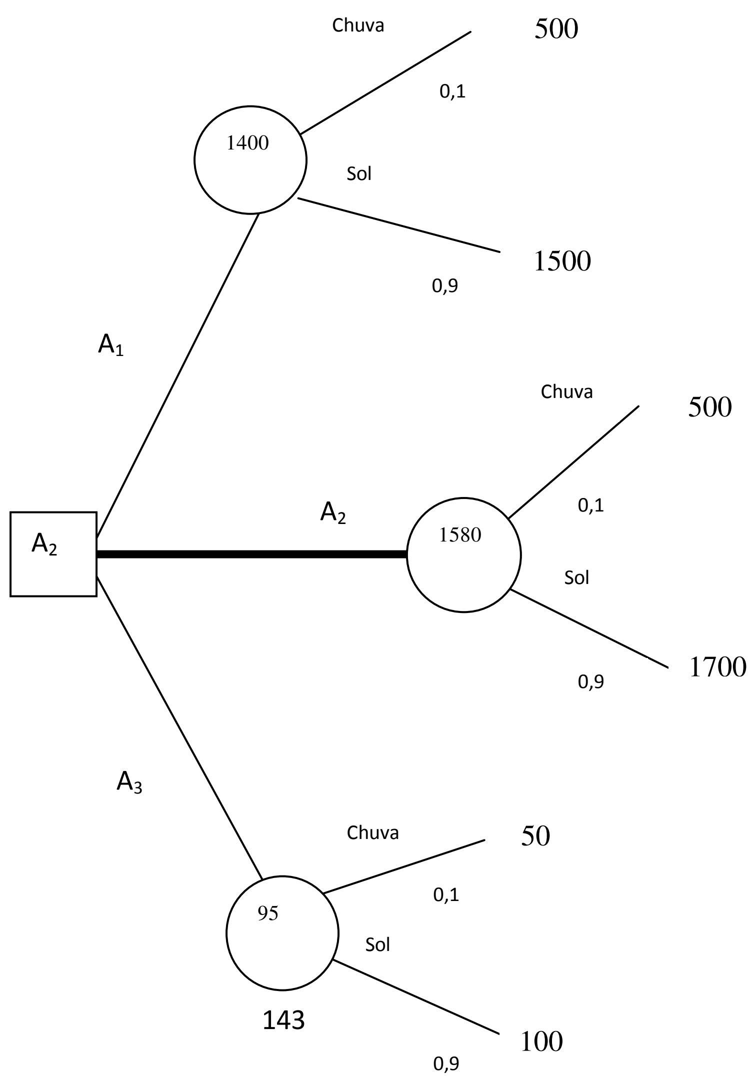
$A_1 = (500)(0,10) + (1500)(0,90) = 1400$

$A_2 = (500)(0,10) + (1700)(0,90) = 1580$

$A_3 = (50)(0,10) + (100)(0,90) = 95$

A melhor decisão para o grupo 5 é viajar para o hotel fazenda.

Figura 31 - Árvore da decisão do grupo 5.



GRUPO 6.

30% de probabilidade de chuva e 70% de probabilidade de sol.

Justificativa. Nos dois últimos anos janeiro não foi um mês chuvoso.

Tabela 25- Tabela das preferências do grupo 6.

Ação / Natureza	A_1 = praia	A_2 = hotel fazenda	A_3 = casa de campo
CHUVA (p=0,30)	-50	50	-40
SOL (p=0,70)	150	200	180

Valor esperado para cada ação.

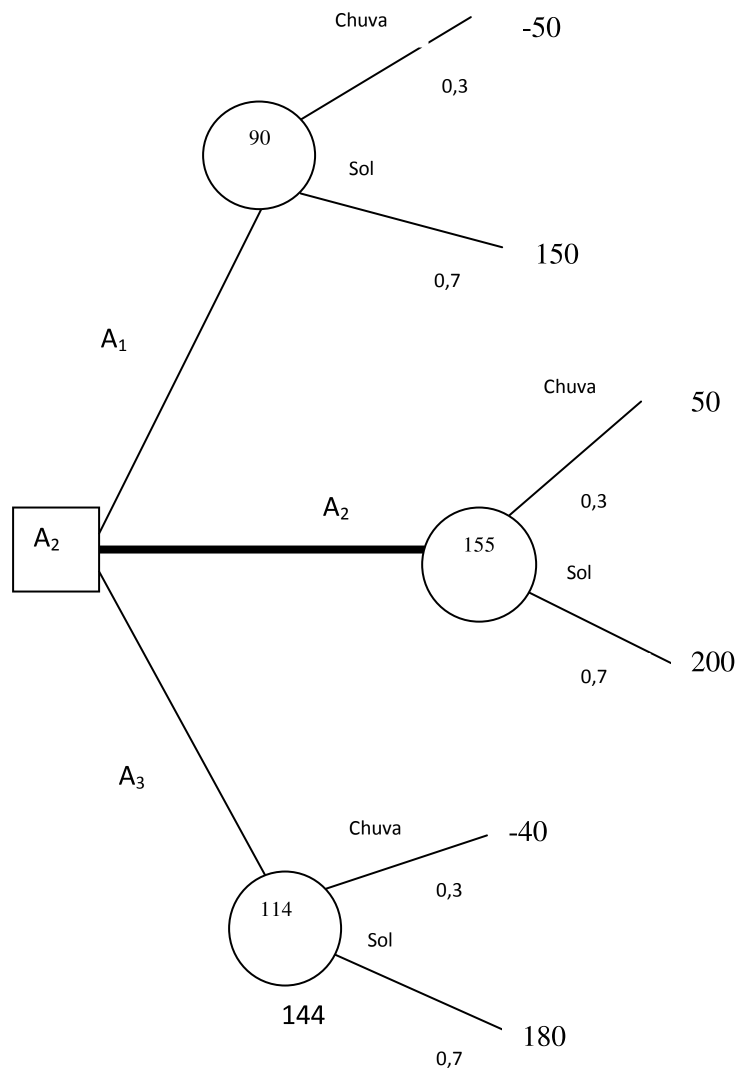
$A_1 = (-50)(0,30) + (150)(0,70) = 90$

$A_2 = (50)(0,30) + (200)(0,70) = 155$

$A_3 = (-40)(0,30) + (180)(0,70) = 114$

A melhor decisão para o grupo 6 é viajar para o hotel fazenda.

Figura 32 - Árvore da decisão do grupo 6.



Das 6 equipes, apenas uma escolheu casa de campo, as demais preferem o hotel fazenda. O resultado retrata a preferência da turma. A maioria dos alunos dessa sala é da zona rural e gosta do campo. Já é costume da escola nas séries finais do ensino fundamental e médio a realização de uma viagem para um hotel fazenda da região. Essa viagem é aguardada com ansiedade pelos alunos.

Nesta atividade os alunos assimilaram o uso do diagrama de árvores e o cálculo do valor esperado. Entenderam que ao tomar uma decisão podem atribuir valor numérico às preferências e assim, tentar maximizar a escolha, decidindo com mais cautela e precisão.

CAPÍTULO 7

CURIOSIDADES BIOGRÁFICAS E HISTÓRICAS

7.1) KOLMOGOROV

Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), foi um dos mais importantes matemáticos do século 20. Seus trabalhos tiveram impactos em várias áreas da Matemática. Matemático soviético, sua genialidade se evidenciou ainda cedo durante a graduação. Aos 18 anos obteve seu primeiro resultado independente sobre séries de Fourier- Lebesgue. Em 1925, ao se formar na Universidade Estadual de Moscovo já havia publicado 8 artigos científicos. O interesse por probabilidade iniciou-se em 1924 e em 1925 publicou seu primeiro trabalho nessa área contendo o teorema das “Três séries” e resultados em inequações de somas parciais de variáveis aleatórias que se tornaram a base para as desigualdades de martingales e do cálculo estocástico.

Em 1928, determinou condições necessárias e suficientes para a lei forte dos grandes números e, provou sob condições bastante gerais, a lei do logaritmo iterado, todos estes, resultados assintóticos, para soma de variáveis independentes.

Em 1929, publicou seu trabalho Teoria Geral de Medidas e Teoria de Probabilidade onde foi apresentada a primeira descrição de uma construção axiomática baseada na teoria da medida.

Em 1933, publicou em alemão um livro que foi traduzido para o inglês com o título Foundations of the Calculus of Probability, onde desenvolve a teoria da probabilidade de forma matematicamente rigorosa a partir de fundamentos axiomáticos baseados na teoria da medida. Sua obra trouxe importantes contribuições e marcou o início do desenvolvimento da teoria moderna de probabilidade.

7.2) THOMAS BAYES

Thomas Bayes, reverendo presbiteriano viveu no início do século XVIII (1701-1761) na Inglaterra. Estudou Teologia na Universidade de Edimburgo. Em 1752 foi eleito para a Real Sociedade, entidade científica britânica criada em 1645. Dois anos após sua morte, um amigo, o filósofo Richard Price (1723-1791) apresentou à Real Sociedade um artigo que aparentemente encontrou entre os papéis do reverendo, com o nome ‘Na essay towards solving a problem in the doctrine of chances’ (Ensaio buscando resolver um problema na doutrina das probabilidades). Nesse artigo estava a demonstração do famoso teorema de Bayes. Esse trabalho foi resgatado pelo matemático francês Pierre-Simon Laplace que o revelou ao mundo.

Pode-se dizer que o bayesianismo tem dois importantes alicerces epistemológicos. O primeiro é a visão do universo com base em graus de crença ou credibilidades, em vez de tudo ou nada. O segundo é uma regra matemática que explicita como você deve mudar seu grau de incerteza à luz de novos dados empíricos. A partir desses dois pilares podemos deduzir uma série de implicações filosóficas do bayesianismo [31].

O bayesianismo liga a inferência racional (probabilidade a posteriori) à subjetividade (probabilidade a priori) e à experiência empírica (probabilidade condicional). A estatística bayesiana mede um grau de incerteza o que permite trabalhar com probabilidade de hipóteses e parâmetros.

7.3) **PASCAL E O PRINCÍPIO DA EXPECTÂNCIA MATEMÁTICA**

Este texto baseia-se em [14].

O homem sempre possuiu uma busca constante de conhecimento de si mesmo e da sociedade que o cerca. Várias são as obras que procuram entender o comportamento humano. A matemática embora muito aplicável ao mundo físico, também tem aplicabilidade no estudo do comportamento humano, embora isso tenha gerado muitas controvérsias. Para vários estudiosos das exatas era impossível equacionar o comportamento do homem, devido à presença do “humano” e ao fator psicológico.

Pascal foi o primeiro a escrever uma teoria matemática que tratou do comportamento humano através do princípio da expectância matemática. Pascal passou a sua vida dividido entre a carreira matemática e a religiosa. Ao levantar a questão de acreditar ou não em Deus, Pascal afirma que a fé não é objeto de escolha racional. O que podemos é decidir levar uma vida de acordo com os princípios cristãos ou nos deixar levar pelas paixões do mundo, como se Deus não existisse. Na primeira escolha, teríamos uma vida pia e na segunda, uma vida mundana. Apesar da razão não poder determinar a existência ou não de Deus, este, de fato, existe ou não existe. Para resolver esse problema Pascal utilizou o conceito valor esperado. Para ele, o ganho de uma vida pia, caso Deus existisse, seria infinito;

caso não existisse seria zero. O ganho de uma vida mundana seria algum valor constante, ou seja, k, independentemente de Deus existir de fato ou não [13].

Assim, atribuindo uma probabilidade $\alpha \neq 0$ para a existência de Deus e $1-\alpha$ para a não existência de Deus, o valor esperado (ou esperança matemática) de levar uma vida pia seria,

$$\mathbf{E(\text{ vida pia}) = \alpha.\infty + (1-\alpha) . 0 = \infty.}$$

O valor esperado para uma vida mundana

$$\mathbf{E(\text{ vida mundana}) = \alpha . k + (1-\alpha) . k = k.}$$

Portanto a esperança em levar uma vida pia é maior do que levar uma vida mundana, qualquer que seja a probabilidade α de Deus existir. Desse modo, Pascal concluiu que viver como se Deus existisse, através da vida pia, seria a melhor opção, pois a vida pia possui valor esperado maior do que a vida mundana.

A análise feita por Pascal para tomar uma decisão sobre seu comportamento baseada em valores esperados chamou a atenção de matemáticos e foi utilizada como método de análise de decisões durante as últimas décadas do século XVII.

Se chamarmos de $Y = (y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$ os possíveis resultados e $P_k = (p_1^k, p_2^k, \ldots, p_n^k)$, com $k = 1, 2, \ldots, K$ os valores das probabilidades de k apostas disponíveis, então o princípio da expectância matemática estabelece que a aposta P_e , $1 \leq e \leq k$ deve ser escolhida entre as demais apostas, se ,e somente se

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, p_i^e \geq \sum_{i=1}^{n} y_i\, p_i^k \quad \text{para todo } k = 1, 2, \ldots, k.$$

Fica claro que a única medida importante para a tomada de decisões baseada nesse princípio é o valor esperado. O princípio da esperança matemática constituiu-se do primeiro desenvolvimento intelectual capaz de lidar com decisões em condições de incerteza.

7.4) BERNOULLI E O PARADOXO DE SÃO PETERSBURGO

Em 1738 , Daniel Bernoulli (1700 – 1782), sobrinho de Jacob Bernoulli, mostrou-se insatisfeito com o princípio da esperança matemática de Pascal. Através do famoso Paradoxo de São Petersburgo enfatizou que “homens prudentes” não obedecem invariavelmente ao princípio de Pascal. O paradoxo de Bernoulli apresenta-se da seguinte maneira: *"Suponha que uma moeda é jogada repetidamente até que a primeira "cara" apareça. O jogo paga 2^{n-1} dólares se a primeira cara aparecer na enésima rodada. Qual o preço que um indivíduo pagaria para entrar nesse jogo?"*

A solução de Bernoulli para o Paradoxo de São Petersburgo é o marco inicial da teoria da utilidade esperada. Ele argumentou que o valor que uma pessoa atribui a sua riqueza não é o próprio valor monetário desta, mas sim seu "valor moral" ou utilidade [3].

Utilizando o princípio da expectância matemática para resolver o Paradoxo de São Petersburgo podemos perceber que se pode pagar qualquer preço para entrar nesse jogo, o que é incoerente com o comportamento observável no mundo real.

$$E\,(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n . 2^{n-1}$$

$$E(P) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.2 + \frac{1}{8}.4 + \cdots + = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$

Bernoulli postulou o que mais tarde seria conhecido como a lei da utilidade marginal decrescente, que implica que à medida que a riqueza aumenta, decresce a utilidade adicional devido ao aumento da riqueza. Em termos matemáticos, esta lei diz que a utilidade em função da riqueza ou do dinheiro é uma função côncava.

Bernoulli foi além e supôs que a utilidade é igual ao logaritmo (em qualquer base) do resultado em termos monetários. Ou seja, $u(x) = \log_B x$ onde x é o resultado e B é uma base qualquer ($B > 0$ e $B \neq 1$). O cálculo da utilidade esperada é semelhante ao cálculo do valor esperado, mas com a utilidade servindo de peso. Assim, a utilidade esperada de uma loteria é
$U(L) = \sum_i p_i \; U(x_i)$.

Para Bernouli os indivíduos devem procurar maximizar a utilidade esperada dos resultados. Se $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ é o vetor de possíveis resultados e $P_k = (p_1^k, p_2^k, ..., p_n^k)$, $k = 1, 2, ..., K$ são os vetores de probabilidades das apostas disponíveis, então a teoria da utilidade esperada afirma que a aposta P_e, $1 \leq e \leq k$, deve ser escolhida entre k apostas de utilidades esperada diferentes se e somente se

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} p_i^e\, u(y_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i^k\, u(y_i)} \textbf{ para todo } \mathbf{k = 1, 2, ..., k.}$$

Aplicando o conceito de utilidade esperada ao Paradoxo de São Petersburgo e supondo que a utilidade de qualquer resultado é igual ao logaritmo na base 10 do resultado, obtemos

$U(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n . \log(2^{n-1}) = 0{,}30103$. Ou seja, sendo X o valor máximo que o indivíduo estaria disposto a pagar para entrar nesse jogo, temos

$$U(X) = \log X = 0{,}30103 \rightarrow x = 2.$$

Logo 2 dólares seria o valor máximo que o indivíduo deveria estar disposto a pagar.

7.5) **HISTÓRICO DA TEORIA DA UTILIDADE ESPERADA**

Com o surgimento da teoria da utilidade, a subjetividade foi definitivamente introduzida à teoria da decisão. A análise feita por Pascal na expectância matemática não utiliza qualquer tipo de avaliação subjetiva, basta multiplicar as probabilidades pelos possíveis resultados. A teoria da utilidade considera que os riscos estimados por cada indivíduo não possuem o mesmo valor, a utilidade depende das circunstâncias específicas de quem faz a estimativa.

Porém, no decorrer das décadas a teoria de Bernoulli foi sendo esquecida e o conceito de utilidade foi redescoberto várias vezes durante os séculos XVIII e XIX. No século XIX economistas começaram a utilizar a utilidade em suas pesquisas, mas o conceito ficava, na maioria das vezes, restrito ao caso sem incerteza.

No século XVIII Jeremy Bentham (1748-1832) fundamentado no hedonismo dos gregos antigos (o indivíduo age de maneira a buscar o máximo de felicidade possível, redescobre a utilidade. Para ele utilidade é a propriedade de qualquer objeto pela qual ele tende a produzir benefício, vantagem ou felicidade, de modo a evitar a ocorrência de dano ou sofrimento.

"A natureza colocou a humanidade sob o governo de dois senhores soberanos, a dor e o prazer. Compete somente a eles apontar o que devemos fazer, assim como determinar o que realmente faremos. De um lado, o padrão de certo ou errado, de outro a cadeira de causas e efeitos estão ligados a seus tronos...Um homem pode pretender abjurar seu império, mas a realidade é que permanecerá sujeito a ele todo o tempo. O princípio de utilidade reconhece esta sujeição e assume-a para base daquele sistema, cujo objetivo é orientar a fábrica de felicidade pelas mãos da razão e da lei [14]".

Bentham faz parte de uma corrente de economistas marginalistas. Para eles, os consumidores escolheriam, individualmente, aqueles bens que fornecessem a máxima utilidade possível, dado suas restrições orçamentárias. A utilidade era uma medida cardinal da intensidade dos desejos, prazer ou felicidade. Maximizando a utilidade se maximizava o prazer ou a felicidade. Para os marginalistas a função utilidade U (x_1, x_2, ...,x_n) era dada como uma medida do bem-estar psicológico dos indivíduos de acordo com o consumo das quantidades x_i dos bens, i = 1, 2, ..., n. Quanto maior a quantidade de cada bem, maior o nível de utilidade.

As críticas à teoria da utilidade foram muitas. Era considerada como mística e alvo de constantes contestações. Como se pode medir o prazer ou a felicidade? Quem afirma que um indivíduo, sendo juiz de seus próprios atos, quando se confronta com duas opções consegue escolher a opção que lhe fornecerá maior prazer? Havia um certo ceticismo em relação à medida cardinal de utilidade.

Em 1906 uma nova abordagem da teoria da utilidade baseada na ordenação das possíveis combinações surge e, portanto, a cardinalidade pôde ser abandonada. Segundo a ordinalidade para a opção que fornecesse o maior bem-estar designava-se o maior número, para a opção que fornecesse o segundo maior nível de bem-estar , designava-se o segundo número mais alto, e assim por diante. Desse modo, se duas funções utilidades distintas fornecem o mesmo ordenamento, então elas são equivalentes sob o ponto de vista ordinalista.

Na década de 1930, uma interpretação moderna de utilidade ganha campo. Descobre-se que utilidade não é a causa das preferências, mas descrição das preferências. Cada indivíduo escolhe o que prefere e a utilidade é apenas uma indexação matemática para descrever o que eles preferem. A função utilidade deve se comportar segundo o comportamento de escolhas do indivíduo e não o indivíduo se comportar segundo sua função utilidade [24]. Essa ideia foi apresentada por John Hicks (1904-1989), economista britânico e Sir Roy George Douglas Allen (1906- 1983), economista, matemático e estatístico inglês, e recebeu o nome de abordagem operacionalista. Com essa abordagem a teoria da utilidade passa a ganhar maior aceitação entre os estudiosos.

Em 1944, John Von Neumann (1903-1957), matemático húngaro de origem judaica e Oskar Morgenstern (1902-1977), economista austríaco considerado o fundador da teoria dos jogos, desenvolvem uma axiomatização para a teoria da utilidade esperada. Em sua obra "Theory of games and economic behavior" encontra-se as bases axiomáticas para a teoria da utilidade esperada. Eles mostraram que a maximização da utilidade esperada é logicamente equivalente à hipótese de que o comportamento de escolha satisfaz algumas restrições sob a forma de axiomas. Se estes axiomas são satisfeitos, então é possível construir uma função utilidade esperada que represente as preferências do indivíduo.

Hoje a teoria da utilidade esperada encontra-se difundida pelos departamentos de economia e exerce um papel crucial na teoria econômica contemporânea.

Nos problemas e decisões fundamentados sob condições de incerteza esta teoria tem um papel de suma importância, sendo utilizada para modelar o comportamento dos agentes econômicos, e é aplicada em áreas como a microeconomia, teoria dos jogos, economia da informação, finanças e outras. Além da economia, esta teoria também conquistou adeptos nas áreas de administração, psicologia, direito, ciências políticas, filosofia. Não está ligada somente às áreas afins da matemática, trata-se de uma área multidisciplinar e seus avanços repercutem em várias linhas de pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A principal finalidade deste trabalho foi apresentar o cálculo de probabilidades, nas suas diferentes abordagens, relacionando-o com a Estatística e a Teoria da Decisão. A proposta inicial era oferecer ao professor um material de apoio e pesquisa nessa área, buscando inovar suas aulas através de atividades lúdicas, dando espaço para debates, troca de ideias e argumentações. Muitas vezes, os alunos questionam o porquê de aprendermos certo conteúdo e qual a utilidade disso na vida real. A Matemática, muitas vezes, é vista por eles como um monte de cálculos difíceis. Este trabalho mostrou que podemos aliar a Matemática às outras áreas do conhecimento, como Física, Medicina, Sociologia, Filosofia, História, etc.Podemos aplicar a Matemática nas situações mais diversas do cotidiano e da vida do aluno. A interdisciplinaridade permitiu uma nova postura diante do conhecimento, com a qual os alunos aprenderam a trabalhar coletivamente, fazendo a interação entre os conceitos matemáticos aprendidos com as outras disciplinas. Dessa forma a aula tornou-se mais interessante e atrativa, pois o aluno passou de mero receptor para protagonista. Conseguimos visualizar a reação positiva de cada aluno diante dos experimentos que foram realizados no decorrer deste trabalho.

O assunto probabilidade é de enorme importância nos dias atuais. Atualmente, no currículo comum, é ensinado no 2º ano do ensino médio. O nosso objetivo ao escrever sobre esse assunto foi também proporcionar ao aluno a possibilidade de tomar decisões com base em previsões obtidas com cálculos probabilísticos, justificando-se a necessidade de introduzir os conceitos necessários à teoria da decisão.

Em nenhum momento fugimos da teoria e dos conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do assunto. Toda a teoria foi ensinada paralelamente às atividades. Vários exercícios foram resolvidos sobre o tema probabilidade, conforme o livro didático do ensino médio propõe. Percebemos que o desenvolvimento das atividades favoreceu a aprendizagem e a aquisição dos conceitos necessários e houve maior interesse por parte dos alunos durante as aulas, principalmente nas atividades onde havia espaço para discussão, troca de experiências, argumentações e tomada de decisão. A arte de pensar e questionar é inerente ao ser humano que vive buscando respostas às suas indagações. Dessa forma, os alunos perceberam que a Matemática vai muito além de cálculos, fórmulas e equações para serem resolvidas. Esta é prática, está presente nas mais diversas situações do dia-a-dia e torna-se muito útil quando utilizada de forma correta.

Este trabalho desenvolveu nos alunos o senso crítico, a arte de pensar e questionar, o cuidado ao tomar decisões de modo coerente buscando assim a melhor escolha. Dado o caráter globalizado do mundo em que vivemos e a rapidez com que ele se modifica, faz-se necessário que o aluno seja articulado, tendo agilidade na tomada de decisão e na execução de tarefas relacionadas às mais diversas situações.

A atividade "Role os Dados", foi realizada com uma turma de 2º ano do ensino médio da Escola Estadual João Ribeiro de Carvalho. Por ser uma turma do período noturno, os alunos apresentam grandes dificuldades em matemática e muitos deles não possuem interesse pelos estudos. A atividade Role os Dados despertou a atenção e o interesse desses alunos. Toda a turma participou efetivamente e conseguiram chegar às conclusões esperadas. Aproveitamos a curiosidade dos alunos e trabalhamos o jogo do par ou ímpar num mesmo contexto, levando-os a descobrirem se esse jogo é justo, ao ponto de dar a mesma chance aos dois jogadores de ganhar. Probabilidade passou a ser interesse da turma toda que realizou os exercícios propostos pelo livro didático com mais ânimo e força de vontade.

Na atividade "As médias podem não ser significativas?", recordamos as medidas de centralidade e de dispersão. Discutimos sobre situações em que a média aritmética pode ser usada e em quais contextos é significativa. Introduzimos probabilidade subjetiva ao apresentar o problema dos dois alunos e suas respectivas notas em matemática durante todo o ensino médio. Essa atividade permitiu que os alunos percebessem que a escolha certa nem sempre pode estar baseada somente nas medidas de centralidade e dispersão. Outros fatores e informações, envolvendo probabilidade subjetiva podem interferir em nossa opinião e desse modo, passamos a enxergar o problema através de outros ângulos. Os alunos passaram um bom tempo da aula discutindo entre eles sobre o que de fato poderia ter acontecido com os dois alunos e interferido em suas notas. Tomar a decisão para a escolha do melhor aluno não foi fácil. Os alunos perceberam que em situações que envolvem incertezas, apesar das informações que de dispomos, não podemos ter a certeza absoluta de que a nossa escolha foi a melhor. Por outro lado, devemos ser coerentes e informados para buscarmos, mesmo diante da incerteza, tomar a decisão que nos satisfaça, buscando acertar.

A atividade Sorte ou Azar apresentou ao aluno o jogo da raspadinha, levantoando o questionamento: vale a pena apostar nesse tipo de jogo? Ao calcular as probabilidades de ganhar os prêmios propostos pelo jogo, os alunos ficaram surpresos com as pequenas chances e com o alto valor arrecadado com a venda de todos os bilhetes do jogo.

Na atividade Ciência Forense e Probabilidade os alunos foram os protagonistas da situação. Um tema inédito, que chamou a atenção dos visitantes da feira. Alguns deles visitavam o trabalho pela curiosidade. Cada aluno teve um papel importante no desenrolar da apresentação, como vítima, perito, investigador e apresentador da situação. Foi um momento de grande aprendizado fazendo a ligação da

Matemática como uma área pouco conhecida por eles, mas de interesse de vários. Os alunos não mediram esforços para realizar os estudos necessários, as pesquisas e a preparação do trabalho. A coleta e análise dos dados foram feitas por eles mesmos, que juntos chegaram às conclusões. Muitos participantes da feira admiraram a ligação que os alunos conseguiram fazer entre a ciência forense e a matemática. O trabalho recebeu nota máxima em vários quesitos e os alunos sentiram-se realizados.

A atividade “Qual a melhor decisão?” permitiu aos alunos a análise de situações presentes no dia-a-dia de cada um deles. Envolvendo um conceito que não faz parte do currículo básico comum do ensino médio, mostrou que o professor pode ir além da proposta de trabalho sugerida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) . Com a visão de que o ensino médio deve desenvolver um conhecimento efetivo e de significado próprio, de modo a preparar o aluno para a vida, a atividade ofereceu ao aluno a aprendizagem dos diversos conceitos necessários para a tomada de decisão. Uma das competências a serem desenvolvidas pelo aluno do ensino médio é tornar-se um cidadão crítico e socialmente responsável, sendo assim, a atividade foi condizente a essa competência. Levamos o aluno à percepção da importância das suas decisões, como elas devem ser coerentes e conscientes.

Ao concluir este trabalho percebemos a necessidade urgente de aliar às aulas tradicionais uma nova maneira de ensinar, onde professor e aluno são os elementos mais importantes desse contexto. Muitos professores ficam preocupados com o cumprimento do livro didático nas turmas de ensino médio. É necessário que haja planejamento e cumprimento do programa, mas há espaço para novidades. Nos dias atuais devemos apresentar a Matemática como parte integrante da vida do aluno e associá-la a outras disciplinas e áreas do conhecimento, favorecendo a interdisciplinaridade e evitando apresentá-la como uma matéria isolada. Através deste trabalho conseguimos atingir esse objetivo. A Matemática tornou-se interesse de vários alunos desmotivados, que através das atividades realizadas conseguiram assimilar o conceito ensinado mais facilmente.

Conseguimos contribuir para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à compreensão, comunicação, investigação e contextualização. Levamos o aluno a compreender a Matemática enquanto ciência organizada e como um conhecimento social e historicamente construído.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BEKMAN, O. R. e NETO, P.L.O.C. **Análise Estatística da Decisão**. 2ª ed. São Paulo: Editora Blucher, 2009.

[2] BENNET, D. J. **Aleatoriedade**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

[3] BERNOULLI, D. **Specimen theoriae de mensura sortis**. Commentari Academiae Scientiarum Imperalis Petropolitanae. Versão traduzida: Expositions of New Theory on the Measurement of Risk Econometrica, 1954.

[4] BERNSTEIN, P. L. **Desafio aos deuses: a fascinante história do risco**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1997.

[5] BORGES, Wagner de Souza. **Probabilidades**. Revista Primus Vitam. Nº 2 , 1º semestre de 2011.

[6] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.

[7] BUCHANAM, L.; O'CONNEL, An. **Tomada de decisão.** Publicado em janeiro de 2006 pela Harvard Business Review. Disponível em: http://aljmartins.hostmach.com.br/ist/sad/material/tomada/_decisao.pdf. Acesso em 20/10/2014.

[8] CÁLCULO – Revista Jornalística Mensal. Ano 2 – Edição 23 – dezembro de 2012. Editora Segmento.

[9] CÁLCULO – Revista Jornalística mensal. Ano 3 – edição 31 – agosto de 2013. Editora Segmento.

[10] CÁLCULO – Revista Jornalística mensal . Ano 3 – edição 35 – dezembro de 2013. Editora Segmento.

[11] CAZORLA, I. M. **A Relação entre Habilidade Viso-Pictórica e o Domínio de Conceitos Estatísticos na Leitura de Gráficos**. Tese – Doutorado – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

[12] CRESPO, A. A. **Estatística Fácil.** São Paulo: Editora Saraiva: 2002.

[13] CRUSIUS, C. A. **A razão como faculdade calculadora: a aposta de Pascal.** Porto Alegre: Editora Da Universidade/UFRGS, 2001.

[14] CUSINATO, R. R.. **Teoria da Decisão sob Incerteza e a Hipótese da Utilidade Esperada: Conceitos Analíticos e Paradoxos.** Porto Alegre: Editora da Universidade: 2003.

[15] DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: Um Curso Introdutório.** 2ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004.

[16] DE FINETI, B. **Probabilidade.** Tradução de Beatriz Simões de Carvalho. In: Enciclopédia Einaudi, v.15. Cálculo-Probabilidade. Edição Portuguesa, 1989.

[17] FERREIRA, P. L. **Introdução à análise da decisão.** Faculdade de Economia: Universidade de Coimbra, 1994.

[18] FREEDMAN, D.; PISANI, R.; PURVES, R. **Statistics.** Fourth edition, Copyright , W.W. Norton & Company Inc., 1998.

[19] GOMES, L.F.A.M.; ARAYA, M.C.G.; CARIGANANO, C. **Tomada de decisões em cenários complexos**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

[20] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática Ciência e Aplicações**. São Paulo: Editora Saraiva, 2013

[21] JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso de nível intermediário**. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[22] JEFFREY, R. **Subjective probability.** Cambridge University Press. First published, British Library, 2004.

[23] LINDLEY, D.V. **Making Decisions.** Wiley, 1985.

[24] LISBOA, M.B. **A Miséria da Crítica Heterodoxa**. Primeira parte: sobre as críticas. Revista de Economia Contemporânea, n.3, jan-jun, 1997.

[25] MEC. **Coleção Explorando o Ensino: Matemática**. Volume 3. Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2004.

[26] MEYER, P. L. **Probabilidade: Aplicações à Estatística**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Livro Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983.

[27] MLODINOW, L. **O Andar do Bêbado**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora: 2009.

[28] MORALES, A. e GREGORIA, M. **Teoria Subjetiva de La Probabilidad: Fundamentos, Evolucion Y Determinacion de Probabilidades**. Tesis Doctoral – Departamento de Estadistica Y Metodos de Decision, Facultad de Ciencias Economicas Y Empresariales:Universidad Complutense de Madrid, 1985.

[29] MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P. e FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[30] NETO, P. L. O. C. e CYMBALISTA, M. **Probabilidades.** São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.

[31] PENA, S. D. Artigo : **Thomas Bayes, o cara!** Publicado na revista Ciência Hoje – vol. 38 – nº 228; julho de 2006.

[32] RIFO, L. L. R. **Coisa de passarinho**. Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. Vídeo: série matemática na escola. Universidade Estadual de Campinas. Link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1070. Acesso em 20.10.2014.

[33] RIFO, L. L. R. **O crime da rua do gasômetro.** Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. Video: série matemática na escola. Universidade Estadual de Campinas. Link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1079 .Acesso em 21.10.2014.

[34] RIFO, L. L. R. **Brasil x Argentina.** Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. Vídeo: série matemática na escola. Universidade Estadual de Campinas. Link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1056. Acesso em 21.10.2014.

[35] RIFO, L. L. R. **Análise combinatória, probabilidade, noções de estatística.** Módulo III – D6. Redefor, Universidade Estadual de Campinas, novembro, 2010.

[36] SAVAGE, L.J. **The Foundations of Statistics**. Wiley, New York, 1954.

[37] SILVA, C. B. **Pensamento e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de Matemática.** Doutorado em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2007.

[38] SMOLE, K. S. & DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio**. Volume 2.6ª ed.São Paulo: Saraiva, 2010.

[39] STELLA, C.A. **Um Estudo Sobre o Conceito de Média com Alunos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo , 2003.

[40] TUNALA, N. **Determinação de probabilidades por métodos geométricos**. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 20, p. 16.22, 1995.

[41] WAGNER, E. **Probabilidade geométrica**. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 34, p. 28.35, 1997.

[42] www.ibge.gov.br Acesso em 20.12.2014.

[43] www.imeusp.br/~rvicente/EST01_Probabilidade.pdf - Acesso em 20.10.2014

[44] http://www.st-andrews.ac.uk/ - Acesso em 02.11.2014

[45] www.wikiciencias.casadasciencias.org – Acesso em 10.01.2015.

[46]http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/del9215.htm - Acesso em 04.05.20

[47]http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/1965-1988/Del0204.htm - Acesso em 04.05.2015

[48]http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/instantanea/ - Acesso em 10.01.2015

[49] FANTÁSTICO. **O País dos Raios**: Raios matam 130 pessoas e deixam mais de 200 feridas por ano no Brasil. Rede Globo de Televisão, 2013. Disponível em : <http.//g1.globo.com/fantástico/noticia/2013/02/raios-matam-130-pessoas-e-deixam-200-ferida-por-ano-no-brasil.html>. Acesso em 20.12.2014.

[50]Newsgame: CSI-Ciência contra o crime. Revista super Interessante. Link: http://super.abril.com.br/multimidia/info_405177.shtml . Acesso em 29.09.2014.

APÊNDICE

MATERIAL DE APOIO PARA AS ATIVIDADES

Material de apoio para a atividade "Role os Dados".

Regras e procedimentos do jogo.

- O jogo Role os Dados deve ser jogado em dupla.
- Cada dupla deverá ter dois dados.
- Um jogador deverá ser A e o outro deverá ser B, o critério de escolha para quem será o jogador A ou B deve ser decidido pela dupla.
- O jogador A joga o dado e anota o seu resultado, em seguida o jogador B faz o mesmo. O resultado deve ser marcado na tabela abaixo como para ordenado (A,B).
- Calcula-se a diferença obtida entre os valores dos pares ordenados em módulo $|A-B|$. Se o resultado for 0,1 ou 2 ganha o jogador A. Se o resultado da diferença for 3, 4 ou 5 ganha o jogador B.
- O jogo deve se repetir em 10 rodadas.
- Ao final das 10 rodadas, verifica-se quem foi o vencedor.
- Levanta-se o questionamento, esse jogo é justo, a fim de dar as mesmas chances de vitória para o jogador A e B?

RESULTADO (A,B)	DIFERENÇA $\|A-B\|$	GANHADOR
VENCEDOR	xxxxxxxxxxxxxx	

Material de apoio para a atividade "As Médias Podem Não Ser Representativas?"

Suponhamos que você trabalha numa empresa e seu chefe pede para que examine uma planilha eletrônica com o número diário de pessoas que visitaram o website da empresa no mês de abril do corrente ano durante 4 semanas, e realize a média diária dos visitantes desse mês.

Empolgada com essa simples e modesta missão, você rapidamente calcula a média de visitantes para cada semana. Depois soma as quatro médias semanais, divide-as por quatro, obtendo assim uma nova média: a média das médias semanais e depois multiplica o valor por quatro para obter a média diária mensal. Rapidamente, para demonstrar sua eficiência, mesmo sem prestar muita atenção ao resultado encontrado, você apresenta a sua resposta ao chefe e leva um susto quando ele lhe interroga: mas o que você fez está certo? É o mesmo que somar esses vinte e oito valores e dividi-los por vinte e oito? Esse número encontrado não é um pouco absurdo?

Você permanece em silêncio e não sabe se o que fez está correto e equivale ao mesmo que somar o número de visitantes e dividir por vinte e oito. Afinal, você quis ter as médias semanais como um dado a mais para o problema e tentar impressionar o seu chefe com algumas informações adicionais, demonstrando agilidade de raciocínio e competência. Agora, analisando o resultado você percebe que há algo de errado no valor encontrado.

A tabela representa o número de indivíduos que visitaram o website da empresa durante o decorrer das quatro primeiras semanas do mês de abril.

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo	TOTAL DA SEMANA
1ª semana	35	38	29	42	50	55	43	292
2ª semana	100	27	49	65	48	95	54	438
3ª semana	85	70	62	112	98	102	80	609
4ª semana	90	86	45	86	65	120	84	576

a) Calcule as médias de cada semana. Some as quatro médias semanais e divida-as por quatro. Qual o valor encontrado?

b) Calcule a média aritmética mensal.

c)Quais os valores encontrados nos itens a e b? Por que isso ocorreu?

Vejamos outro exemplo:

Consideremos uma família A com idades:

Pai: 60 anos ; Mãe : 55 anos ; Filho: 30 anos.

Idades da família B:

Pai: 58 anos ; Mãe: 55 anos ; Filho: 28 anos; Filho: 20 anos; Filha: 15 anos.

a) Calcule as médias aritméticas de cada uma das famílias.
b) Calcule a média aritmética do total de pessoas.
c) O que essas médias significam? Qual a diferença entre elas?

Para entender melhor essa situação podemos considerar o seguinte caso hipotético: as notas bimestrais de dois alunos A e B, ao longo dos três anos de ensino médio, em matemática. As notas estão dispostas em ordem de bimestre e ano:

Aluno A = { 7, 6, 5, 5, 7, 6, 5, 5, 7, 6, 5, 5 }

Aluno B = { 4, 4, 5, 7, 4, 4, 5, 7, 6, 6, 7, 9 }

Calcule as medidas de centralidade e o desvio-padrão para cada um dos alunos e responda:

-Qual aluno obteve melhor desempenho em Matemática no decorrer do ensino médio?

-Qual deles poderia ser indicado para cursar Matemática ou algum curso com área afim?

Material de apoio para a atividade "Sorte ou Azar?"

ESCOLA ____

ALUNOS: ____

OBS: A raspadinha deverá ser grampeada nessa folha.

ATIVIDADE ENVOLVENDO O CONCEITO DE PROBABILIDADE

SORTE OU AZAR? AS CHANCES DE GANHAR NO JOGO DA RASPADINHA

Número de bilhetes emitidos nessa série: ______________________________________

Valor de cada bilhete: ____

Valor arrecadado com a venda de todos os bilhetes: ______________________________

Preencha a tabela de acordo com os prêmios da raspadinha. As informações encontram-se no verso da raspadinha escolhida. Apresente a probabilidade na forma de fração e porcentagem.

Prêmio	Quantidade de prêmios	Probabilidade

Valor pago em prêmios: ____

"Lucro" : valor arrecadado com a venda de todos os bilhetes - valor pago em prêmios:

____

Chance de ganhar pelo menos um dos prêmios: ___________________________________

Chance de não ganhar : ____

Qual a sua opinião sobre os valores encontrados?

____

____

Material de apoio para a atividade Ciência Forense e Probabilidade.

QUEM MATOU A JUÍZA?	QUEM MATOU A JUÍZA?
1º MOMENTO	**2º MOMENTO**
☐ **Estagiário**	☐ **Estagiário**
☐ **Filha**	☐ **Filha**
☐ **Caseiro**	☐ **Caseiro**
☐ **Vizinho**	☐ **Vizinho**
☐ **Ela suicidou**	☐ **Ela suicidou**

Material de apoio para a atividade "Qual a melhor decisão?"

PROBLEMA: Uma turma de alunos, da qual você faz parte, vai fazer uma viagem de formatura. Para isso possuem três destinos diferentes: viajar para a praia, viajar para um hotel fazenda ou alugar uma casa de campo com piscina na própria cidade. Os alunos farão essa viagem na segunda semana de janeiro, data em que todos podem participar. Segundo as suas pesquisa há ____% de probabilidade de chuva durante essa semana. Somente uma das viagens deve ser escolhida.

Constatamos que a probabilidade de chuva é de ____% baseando-nos em____

Deve-se levar em conta que,

A_1 Viajar para a praia

O dinheiro da comissão de formatura é suficiente para pagar a locomoção e o aluguel da casa de praia por três dias, tempo suficiente para que haja diversão. Em princípio, essa era a ideia da turma toda. Porém, com a previsão de que há ___% de chance de chuva contra ____% de sol, alguns alunos estão preocupados caso esses três dias sejam chuvosos. Com chuva na praia não há muito o que se fazer, não dá pra curtir o mar e ficar bronzeado. O único jeito seria ficar na casa jogando baralho ou um jogo de tabuleiro. Parece que nesse caso a viagem não será interessante.

A_2 Viajar para um hotel fazenda

Não são todos os alunos que simpatizam com essa ideia. Dizem que é muito pacato e silencioso curtir um final de semana num hotel fazenda. O dinheiro é suficiente para manter as despesas por um final de semana. O hotel tem piscina com toboágua o que anima vários deles. Alguns até preferem piscina do que mar. Caso chova não seria tão ruim assim. O hotel tem uma equipe de monitores excelente que promove brincadeiras, baladas, recreações; caso chova.

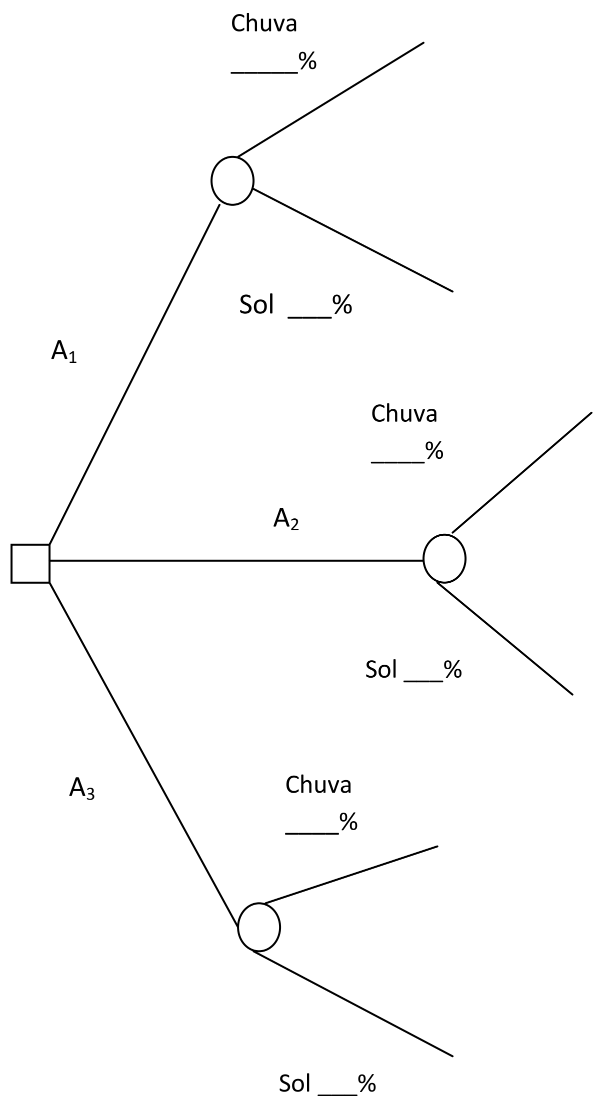
A_3 Alugar uma casa de campo

Como o translado é bem menor, já que a casa de campo é na própria cidade dos alunos, o dinheiro é suficiente para que possam curtir mais dias do que na praia e no hotel. Dá até pra pagar uma cozinheira para fazer o almoço, e assim eles possam se divertir mais. Não tem muita coisa diferente, só há uma piscina. Durante à noite seria um pouco monótono. Porém, caso chova o proprietário devolve o dinheiro oumarca para uma nova data, com dia propício a sol, já que o proprietário é amigo de alguns alunos.

Qual a melhor decisão a ser tomada?

Preencha a tabela com valores de utilidade e escolha qual a melhor decisão através do valor esperado. Depois preencha a árvore de decisão.

Ação / Natureza	A_1 = praia	A_2 = hotel fazenda	A_3 = casa de campo
CHUVA (p=___)			
SOL(p=___)			



TERMO DE ASSENTIMENTO DO MENOR DE IDADE

Eu, ____, aluno da Escola Estadual João Ribeiro de Carvalho, da turma _______________, ensino noturno, aceito participar das atividades propostas em sala de aula pela professora Andréa de Paula Machado Moreira.

Tenho consciência de que tais atividades serão enriquecedoras para o meu aprendizado como aluno. Proponho-me a colaborar com o projeto e ser participativo durante o decorrer do mesmo.

Participarei de todas as atividades propostas depois de apresentar o TCLE devidamente assinado pelo meu responsável, e contribuirei da melhor forma possível para que os objetivos da pesquisa sejam atingidos.

Fui informado que essa pesquisa não acarretará nenhum ônus a minha pessoa e nem mesmo qualquer constrangimento. Aceitarei participar das atividades em grupo e dos jogos, pois tenho consciência de que fazem parte do currículo de matemática do meu ano letivo. Entendo ser esta uma maneira diferente de ensinamento em sala de aula e que só irá contribuir para a minha formação.

Assinatura : ____

Conceição dos Ouros, ____________________ de 2015

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Termo de consentimento livre e esclarecido

Este estudo está dirigido pela professora Andréa de Paula Machado Moreira, e tem a finalidade de analisar a aplicação de atividades lúdicas, com fins puramente acadêmicos, para sua Dissertação de conclusão do PROFMAT.

A metodologia da pesquisa será a utilização de jogos em sala de aula, e não tem riscos previsíveis nem custos para o respondente, que poderá parar de participar das atividades em qualquer momento, sem prejuízo algum, sem custo nem remuneração para nenhuma das partes. O sujeito tem o direito de se retirar do projeto a qualquer momento.

Suas informações serão tratadas de forma confidencial, para uma análise anônima dos dados obtidos. Com a participação nas atividades, você não tem a obrigação de participar em nenhum estudo ou projeto futuro da Unicamp.

Uma cópia deste termo ficará em posse do responsável pelo menor, se necessário.

Em caso de dúvidas, por favor, entre em contato com a Professora Andréa de Paula Machado Moreira, pelo telefone (35) 99936079, em horário do período escolar noturno, turno de trabalho.

Para denúncias e/ou reclamações referentes aos aspectos éticos desta pesquisa, procure o Comitê de Ética em Pesquisa da FCM/UNICAMP.

Rua: Tessália Vieira de Camargo, 126 – CEP 13083-887 Campinas – SP
Fone (019) 3521-8936 ou 3521-7187
e-mail: cep@fcm.unicamp.br

Eu, ____,

pai/mãe/responsável por ____,

aluno/a da E.E. João Ribeiro de Carvalho, autorizo sua participação neste estudo.

Assinatura do responsável _______________________________________

Conceição dos Ouros, ______________________ de 2015.

ANEXOS

Termo de Ciência e Concordância do Diretor

Através deste, eu Adriana Carvalho da Fonseca Areas, diretora da Escola Estadual João Ribeiro de Carvalho, de Conceição dos Ouros – MG, estou ciente que, a professora Andréa de Paula Machado Moreira, realizará uma pesquisa contendo atividades lúdicas com alunos do ensino médio noturno, especialmente turmas de 2º e 3º anos, para fins puramente acadêmicos para a sua dissertação de mestrado do PROFMAT, que será entregue à Unicamp, sobre seu projeto: "Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em Sala de Aula do Ensino Médio", no decorrer do primeiro semestre de 2015.

A metodologia da pesquisa será a aplicação de atividades envolvendo jogos sobre probabilidade e teoria da decisão, e não tem riscos previsíveis de custos para o participante.

Suas informações serão tratadas de forma confidencial, para uma análise anônima dos dados obtidos. Participante das atividades, o aluno não têm a obrigação de participar em nenhum estudo ou projeto futuro da Unicamp.

Uma cópia deste termo ficará em posso da direção da escola na qual a pesquisa será realizada, assim como uma cópia do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido encaminhado aos pais dos alunos participantes da pesquisa.

Para denúncias e/ou reclamações referentes aos aspectos éticos desta pesquisa, procure o Comitê de Ética em Pesquisa da FCM/UNICAMP.
Rua Tessália Vieira de Camargo, 126 – CEP 13083-887 Campinas – SP
Fone: (019)3521-8936 ou 3521-7187
Email: cep@fcm.unicamp.br

Sem mais esse Termo de Ciência assinado abaixo.

Adriana Carvalho da F. Areas
Diretora
MASP 746.091-4

Adriana Carvalho da Fonseca Areas
Diretora da Escola Estadual João Ribeiro de Carvalho
Rua Bueno de Paiva, 208
Conceição dos Ouros – MG
Tel: (35) 3653-1070

Conceição dos Ouros, 04 de fevereiro de 2015.

Autorização do diretor do IMECC

Campinas, 05 de fevereiro de 2015

Prof. Dr. Francisco De Assis Magalhães Gomes Neto
Diretor
IMECC

Caro Professor Francisco,

Venho por meio desta solicitar autorização para a realização da pesquisa associada à dissertação de minha orientanda, Prof. Andréa de Paula Machado Moreira, aluna do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

O projeto de pesquisa inclui a aplicação de jogos e atividades em alunos da Escola Estadual João Ribeiro de Carvalho onde Andréa trabalha, motivo pelo qual este documento é necessário para a apresentação ao Comitê de Ética em Pesquisa da FCM, Unicamp.

O projeto intitulado: " Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em Sala de Aula do Ensino Médio" encontra-se em anexo para sua apreciação.

Agradecendo desde já sua resposta, despeço-me cordialmente,

Prof.Dra. Laura Letícia Ramos Rifo
Departamento de Estatística

Ciente.
De acordo.

Prof. Dr. Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto
Diretor
IMECC-UNICAMP
Matr. 222801
05/02/15

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: APLICAÇÕES DA TEORIA DA DECISÃO E PROBABILIDADE SUBJETIVA EM SALA DE AULA DO ENSINO MÉDIO

Pesquisador: ANDREA DE PAULA MACHADO MOREIRA

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 42623215.2.0000.5404

Instituição Proponente: Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Patrocinador Principal: MINISTERIO DA EDUCACAO

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 1.062.456

Data da Relatoria: 11/05/2015

Apresentação do Projeto:

Este trabalho tem como ênfase o ensino de probabilidade de uma maneira divertida e curiosa. O aluno não será apenas um mero espectador. Terá a oportunidade de participar efetivamente de atividades lúdicas, onde ele mesmo poderá assimilar conceitos importantes e fundamentais para o estudo de probabilidade.
Serão aplicadas três atividades: “Role os dados”, “As medias podem não ser significativas?” e “Qual a melhor decisão?”. As atividades serão desenvolvidas em sala de aula do ensino médio em momento oportuno, quando o assunto a que ela esta relacionada for abordado. Os resultados dos jogos e atividades serão estudados e tabulados em meu trabalho de dissertação. Probabilidade é um tema muito presente em questões de concurso, Enem e vestibulares e nem sempre e trabalhado em sala de aula de forma abrangente ou de modo que os alunos entendam. Muitos alunos trazem consigo a concepção de se tratar de uma matéria complicada e com muitos cálculos, até mesmo alguns professores a consideram uma matéria difícil de ser ensinada. Espera-se que essas atividades e seus resultados possam apresentar uma maneira dinâmica e interessante de se ensinar probabilidade, levando o aluno a uma aprendizagem mais eficiente. Tem-se a intenção de abranger não somente probabilidade clássica, mas probabilidade frequentista e principalmente probabilidade subjetiva e teoria da decisão.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Ensinar probabilidade de maneira inovadora, dando enfoque não somente a probabilidade clássica apresentada pelos livros didáticos, mas também a probabilidade frequentista, subjetiva, introduzindo o conceito de teoria da decisão e sua aplicação em situações do cotidiano.

Objetivo Secundário:

- Desenvolver no aluno o espírito crítico; - Tratar matematicamente situações do acaso e incerteza com as quais os alunos convivem diariamente; - Romper com o determinismo e a linearidade, presentes no currículo de Matemática do ensino médio; - Contribuir para a alteração da imagem social da Matemática; - Levar o aluno a buscar a melhor decisão diante de uma situação de incerteza; - Dar enfoque a uma Matemática baseada não somente em formulas, mas com espaço para a reflexão, discussão, busca da melhor solução para o problema através da investigação e observação dos fatos; - Apresentar ao professor do ensino médio uma maneira atrativa de se ensinar probabilidade clássica, dando espaço também para outras abordagens de probabilidade e teoria da decisão.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Não há riscos previsíveis. Os benefícios diretos aos participantes seria de ter uma experiência mais lúdica com a matéria de Probabilidade. Os demais benefícios: "Ensinar probabilidade de uma maneira inovadora, através de atividades lúdicas onde o aluno e agente participativo e ativo na aprendizagem. O assunto não será abordado de modo teórico pelo professor. Sugere-se uma aprendizagem mais eficiente e abrangente. Probabilidade é um tema do dia-a-dia e muitos alunos têm dificuldades em aprender o conceito do modo que os livros didáticos apresentam. Deseja-se apresentar a Matemática de um modo diferente, focada não apenas em formulas e cálculos, mas com espaço para o aluno desenvolver a criticidade, dar sua opinião e buscar a melhor decisão diante de situações que envolvam risco e incerteza. Pretende-se também inserir teoria da decisão nas aulas de ensino médio, mostrando para os alunos os seus benefícios para aqueles que a conhecem e conseguem entendê-la. Serve também como material de apoio para professores que buscam melhorar sua qualidade de ensino e estão em constante aprendizado. É um incentivo para que busquem novas maneiras de ensinar, alem dos livros didáticos e apostilas."

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Faz parte da metodologia de ensinar conceitos da Teoria de Decisão, a apresentação de vídeos aos alunos para promover o debate. Os vídeos estão listados no Projeto.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Foram apresentados:

1.Folha de rosto devidamente assinada e datada.

2.Projeto de pesquisa relacionado a projeto de Mestrado profissional. 3.Projeto de pesquisa detalhado com embasamento da literatura.

4. Formulário de informações básicas do projeto na Plataforma Brasil: 5.TCLE

Recomendações:

Não está explicitado no TCLE que o participante receberá uma cópia, mas relembramos aos pesquisadores que:

De acordo com a Resolução 466 no parágrafo IV 3f deve haver garantia de que o participante recebera um via do termo de consentimento livre e esclarecido devidamente assinado (rubricados em todas as suas páginas e assinadas ao seu termino. Ver CNS 466 IV5d. Portanto, recomendamos substituir a palavra "cópia" por "via".

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Não há.

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

Considerações Finais a critério do CEP:

- O sujeito de pesquisa deve receber uma via do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, na íntegra, por ele assinado.

- O sujeito da pesquisa tem a liberdade de recusar-se a participar ou de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma e sem prejuízo ao seu cuidado.

- O pesquisador deve desenvolver a pesquisa conforme delineada no protocolo aprovado. Se o pesquisador considerar a descontinuação do estudo, esta deve ser justificada e somente ser realizada após análise das razões da descontinuidade pelo CEP que o aprovou. O pesquisador deve aguardar o parecer do CEP quanto à descontinuação, exceto quando perceber risco ou dano não previsto ao sujeito participante ou quando constatar a superioridade de uma estratégia diagnóstica ou terapêutica oferecida a um dos grupos da pesquisa, isto é, somente em caso de necessidade de ação imediata com intuito de proteger os participantes.

- O CEP deve ser informado de todos os efeitos adversos ou fatos relevantes que alterem o curso normal do estudo. É papel do pesquisador assegurar medidas imediatas adequadas frente a evento adverso grave ocorrido (mesmo que tenha sido em outro centro) e enviar notificação ao CEP e à Agência Nacional de Vigilância Sanitária – ANVISA – junto com seu posicionamento.

- Eventuais modificações ou emendas ao protocolo devem ser apresentadas ao CEP de forma clara e sucinta, identificando a parte do protocolo a ser modificada e suas justificativas. Em caso de projetos do Grupo I ou II apresentados anteriormente à ANVISA, o pesquisador ou patrocinador deve enviá-las também à mesma, junto com o parecer aprovatório do CEP, para serem juntadas ao protocolo inicial.

- Relatórios parciais e final devem ser apresentados ao CEP, inicialmente seis meses após a data deste parecer de aprovação e ao término do estudo.

CAMPINAS, 14 de Maio de 2015

Assinado por:
Renata Maria dos SantosCeleghini
(Coordenador)

Endereço: Rua Tessália Vieira de Camargo, 126
Bairro: Barão Geraldo **CEP:** 13.083-887
UF: SP **Município:** CAMPINAS
Telefone: (19)3521-8936 **Fax:** (19)3521-7187 **E-mail:** cep@fcm.unicamp.br